



[Guía de estudio]

Segundo
SEMESTRE

Matemáticas II



PLAN 2014
ACTUALIZADO



PLAN 2014

A C T U A L I Z A D O

CRÉDITOS

Autores:

Profesora. Selene del Carmen Ávila Anaya
Profesora. Aimé García

Actualización

Profesor. Luis Darío Cedillo Aguilar
Profesor. Pedro Zarazúa Fernández
Profesora. Aimé García

Coordinadores:

Aimé García
Coordinadora de Proyectos de Matemáticas
Subdirección de Planeación Curricular





PRESENTACIÓN

Con la finalidad de acompañar con el plan y programas de estudio vigentes, además de brindar un recurso didáctico que apoye al cuerpo docente y al estudiantado en el desarrollo de los aprendizajes esperados; el Colegio de Bachilleres desarrolló, a través de la Dirección de Planeación Académica y en colaboración con el personal docente de los veinte planteles, las guías de estudio correspondientes a las tres áreas de formación: básica, específica y laboral.

Las guías pretenden ser un apoyo para que las y los estudiantes trabajen de manera autónoma con los contenidos esenciales de las asignaturas y con las actividades que les ayudarán al logro de los aprendizajes; el rol del cuerpo docente como mediador y agente activo en el aprendizaje del estudiantado no pierde fuerza, por el contrario, se vuelve fundamental para el logro de las intenciones educativas de este material.

Las guías de estudio también son un insumo para que las y los docentes lo aprovechen como material de referencia, de apoyo para el desarrollo de sus sesiones; o bien como un recurso para la evaluación; de manera que, serán ellos, quienes a partir de su experiencia definirán el mejor uso posible y lo adaptarán a las necesidades de sus grupos.

El Colegio de Bachilleres reconoce el trabajo realizado por el personal participante en la elaboración y revisión de la presente guía y agradece su compromiso, entrega y dedicación, los cuales se reflejan en el servicio educativo pertinente y de calidad que se brinda a más de 90,000 estudiantes.



La comprensión de las Matemáticas te brinda las herramientas para interpretar el entorno a través de la cuantificación, medición y descripción por medio de ecuaciones y funciones. Una vez que se entiende un concepto matemático, el entorno se mirará de manera diferente. Las aplicaciones matemáticas se pueden observar en cada aspecto de la vida diaria, en la cuenta de las compras, en la construcción de un edificio, en los registros de las calificaciones de los estudiantes, en la evolución de una enfermedad, entre otros.

Particularmente, la asignatura de Matemáticas II tiene como propósito que desarrolles el razonamiento geométrico, a partir de la aplicación de estrategias de análisis y solución de problemas a través de la representación de objetos geométricos, así como de las propiedades del pensamiento lógico espacial, para que comprendas el uso de la configuración espacial, de las relaciones implicadas.

Este material constituye un apoyo para el momento de la contingencia que se está viviendo actualmente, y tiene la intención de contribuir a que logres adquirir los aprendizajes comprendidos en la asignatura de Matemáticas II

Es recomendable que al momento de estudiar atiendas los siguientes consejos:

- Reduce o elimina las distracciones
- Dedicar un tiempo exclusivo para el estudio
- Designar un espacio particular para tu estudio
- Organizar cuáles serán los temas que vas a estudiar
- Realizar anotaciones y seguir los procedimientos de manera activa, es decir, reproducélos y compruébalos por tu cuenta
- Anexar hojas si lo consideras necesario
- Tener a la mano una calculadora científica y explorarla con el fin de conocer su funcionamiento
- Si se te presentan dudas, repasa el contenido o consulta el material recomendado en la sección ¿Quieres conocer más?

**PRESENTACIÓN
INTRODUCCIÓN**

CORTE DE APRENDIZAJE 1	8
Propósito	9
Conocimientos previos	10
Evaluación diagnóstica	11
Conceptos básicos de la geometría	14
Actividad de aprendizaje 1	15
Elementos, características y notación de ángulos	16
Actividad de aprendizaje 2	19
Ángulos entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal	21
Actividad de aprendizaje 3	26
Sistemas angulares de medición	29
Actividad de aprendizaje 4	35
Patrones y fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos	37
Actividad de aprendizaje 5	43
Autoevaluación	44
Fuentes Consultadas	45
CORTE DE APRENDIZAJE 2	46
Propósito	47
Conocimientos previos	48
Evaluación diagnóstica	49
Congruencia de triángulos	52
Actividad de aprendizaje 1	55
Actividad de aprendizaje 2	56
Actividad de aprendizaje 3	57
Teorema de Tales	59
Actividad de aprendizaje 4	62
Actividad de aprendizaje 5	65
Autoevaluación	66
Fuentes Consultadas	67

CORTE DE APRENDIZAJE 3	68
Propósito	69
Conocimientos previos	70
Evaluación diagnóstica	71
Relaciones trigonométricas en el triángulo	74
Actividad de aprendizaje 1	79
Actividad de aprendizaje 2	80
Actividad de aprendizaje 3	80
Círculo trigonométrico	83
Actividad de aprendizaje 4	87
Autoevaluación	88
Fuentes Consultadas	89
EVALUACIÓN FINAL	90

CORTE

1

Elementos básicos de la Geometría

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos

- Elementos, características y notación de ángulos.
- Sistemas angulares de medición
- Patrones y fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

Aprendizajes esperados.

- Distingue conceptos básicos de: recta, segmento, semirecta, línea curva.
- Interpreta los elementos y las características de los ángulos
- Trabaja con diferentes sistemas de medición de los ángulos, realizan conversiones de medidas.
- Identifica, clasifica y caracteriza a las figuras geométricas.
- Significa las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas con el uso de materiales concretos y digitales.

Al término de este corte, comprenderás los elementos básicos de la Geometría Euclidiana para interpretar, plantear y argumentar soluciones a problemas de tu entorno.

RECOMENDACIÓN

Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

Para que alcances los aprendizajes esperados que corresponden al corte 1, es importante que retomes los siguientes conocimientos:

- ¿Qué es medir?
- Clasificación de ángulos
- Amplitud
- Rectas paralelas
- Opuesto
- Grados, como unidad de medida
- Ecuaciones
- Figuras geométricas
- Perímetro
- Área
- Volumen

Es importante que consultes las referencias indicadas, así como los recursos de apoyo indicados en esta guía.

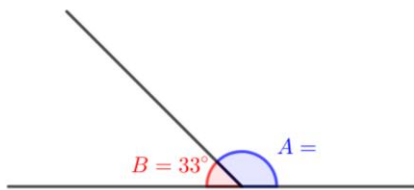
Identifica lo que debes
saber para que la
comprensión de los
contenidos sea más fácil,
si descubres que has
olvidado algo ¡repásalo!



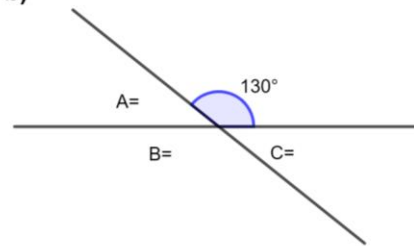
A continuación, se te invita a que respondas la siguiente evaluación diagnóstica, al finalizar, puedes corroborar tus resultados:

1. Determina los valores de los ángulos faltantes en las siguientes figuras:

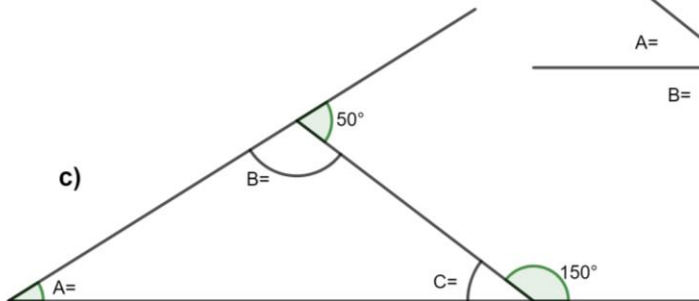
a)



b)



c)

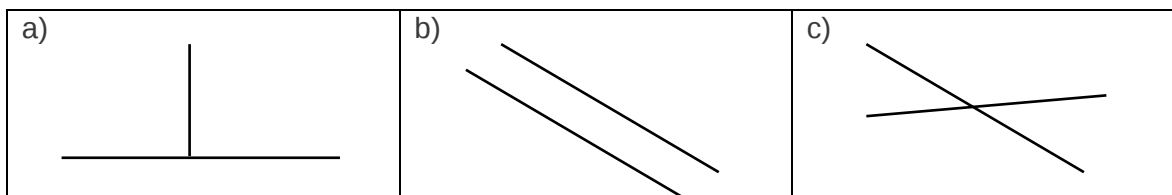


2. Enuncia las características de un:

- a) Triángulo isósceles _____
- b) Triángulo equilátero _____
- c) Triángulo rectángulo _____

3. ¿Cuáles son las unidades de medida que conoces para medir un ángulo? _____ y _____

4. De los siguientes pares de líneas, ¿cuál de ellas, representan líneas paralelas? y ¿por qué?



5. Explica la diferencia entre perímetro, área, y volumen: _____

6. Considera dos triángulos en el que dos de sus lados miden 4 y 12 cm, además el ángulo que se forman entre ellos es de 120° . Trázalo en tu hoja y explica porque razón son iguales.

7. Indica el nombre del polígono regular de acuerdo con la cantidad de lados.

- a) 3 lados _____
- b) 6 lados _____
- c) 7 lados _____
- d) 12 lados _____

8. Define los siguientes conceptos relacionados con la circunferencia:

- a) Radio _____
- b) Diámetro _____
- c) Cuerda _____
- d) Arco _____
- e) Tangente _____
- f) Secante _____

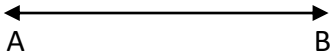
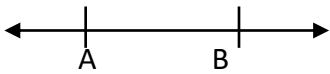
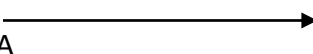
9. Calcula el área y perímetro de una circunferencia de radio igual a 10. Considera π igual a 3.1416



- <https://www.geogebra.org/m/sj5ghqqt>
- <https://youtu.be/ciGtvLyTpk>
- <https://youtu.be/jogZRNrihac>
- Baldor, A. (2004). Geometría plana y del espacio y trigonometría. Vigésima reimpresión México: Publicaciones Cultural.
- Clemens, E. (2004). Geometría. México: Pearson
- Filloy, E., Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Los siguientes conceptos, es posible que ya los conozcas, pero vamos a repasarlos, esto para reafirmar tus conocimientos, y que tu estudio sea completo. ¡Adelante!!

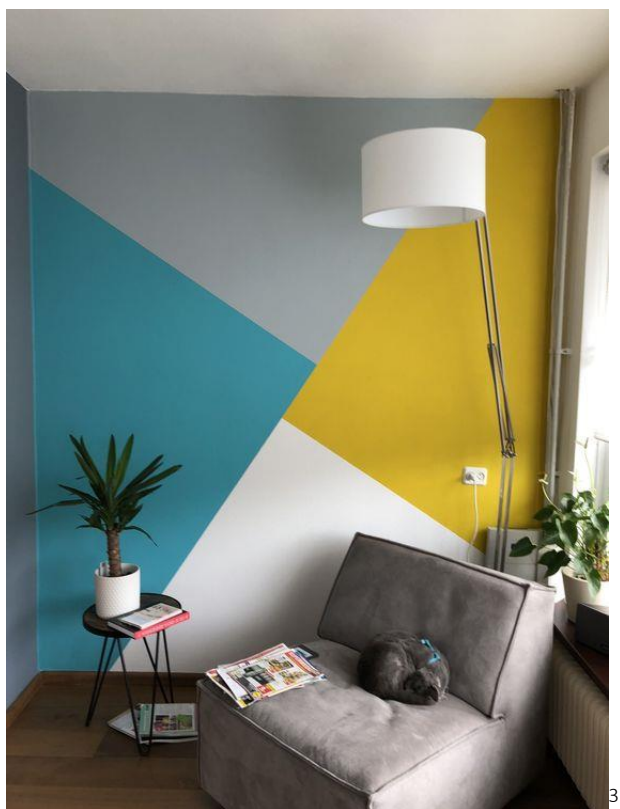
- Conceptos básicos de la geometría.**

Concepto	Definición	Nomenclatura	
Punto	La podemos considerar como la representación de la punta de un lápiz	· A	Punto A
Línea	Es la sucesión de puntos.		
	Línea recta, cuando estos puntos llevan la misma dirección y que se prologan de manera indefinida en ambos sentidos.	 Recta $\overleftrightarrow{AB}$	
	Línea curva, cuando los puntos no siguen la misma dirección, cambiando continuamente de dirección, y no presenta ningún tramo recto.	 1	
Segmento	Indica un tramo de una recta; tiene un principio y un fin.	 Segmento $\overline{AB}$	
Semirrecta	Sucesión de puntos que tienen un inicio, pero no un fin.	 Semirrecta $\overrightarrow{AB}$	
Plano	Superficie que tiene dos dimensiones.	Por ejemplo, una hoja de papel, un postit, el piso, una pared, etc.  2	

¹ <https://pixabay.com/es/>

² <https://pixabay.com/es/>

Actividad de aprendizaje 1



¿Qué conceptos básicos de geometría puedes encontrar en la habitación que se muestra en la imagen?

¿Cómo es la aplicación de la geometría en tu vida cotidiana?



<https://youtu.be/LlrHcJAmplo>

³ <https://pmcasa.com/decoracion/figuras-geometricas-para-decorar-tu-hogar/>

Elementos, características y notación de ángulos

¿Qué es un ángulo?, al abrir la puerta de una habitación, al utilizar una tableta y abrirla, son ejemplos claros de que se genera una abertura, esto es un ángulo, los elementos que lo forman son sencillos, un punto u origen al cual llamamos vértice, y dos lados.

Seguramente recuerdas la clasificación de los ángulos, o al menos los más conocidos: agudo, recto y llano, pero hay otros ángulos pocos conocidos, tal y como te diste cuenta al resolver la evaluación diagnóstica. Tomemos de base un accesorio de casa, que nos ayudará a comprender este punto, un reloj.

¿Puedes decir que ángulo trazan las manecillas del reloj?

Te estarás preguntando: *¿Cómo puedo saberlo?*, pues bien, para ello habrá que recordar la clasificación de ángulos.



4

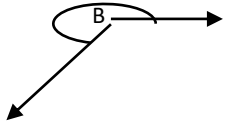
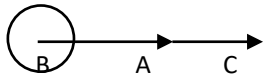
Los ángulos se pueden clasificar de acuerdo con su medida, cuyos ángulos son los más conocidos, pero también se pueden clasificar por parejas especiales de ángulos, como se muestra a continuación.

Clasificación de los ángulos, de acuerdo con su medida⁵:

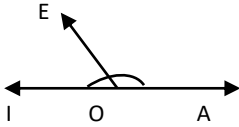
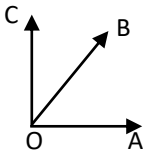
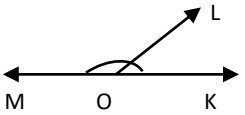
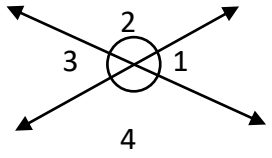
NOMBRE	MEDIDA	FIGURA
Agudo	Mide menos de 90°	A diagram showing an acute angle. It consists of two rays sharing a common vertex. One ray is horizontal and points to the right. The other ray points up and to the right. An arc is drawn between the two rays to indicate the angle. The vertex is labeled with the letter 'A'.
Recto	Mide 90°	A diagram showing a right angle. It consists of two rays sharing a common vertex. One ray is horizontal and points to the right. The other ray is vertical and points upwards. A small square is drawn at the vertex to indicate the right angle. The vertex is labeled with the letter 'R'.
Obtuso	Mide más de 90° y menos de 180°	A diagram showing an obtuse angle. It consists of two rays sharing a common vertex. One ray is horizontal and points to the right. The other ray points up and to the left. An arc is drawn between the two rays to indicate the angle. The vertex is labeled with the letter 'B'.

⁴ <https://es.aliexpress.com/item/1005003497529560.html>

⁵ Tomado de Matemáticas II Geometría y Trigonometría. Aldana M. Elena

Llano	Mide 180°	
Entrante	Mide más de 180° y menos de 360°	
Perigonal	Es el giro completo de un rayo alrededor del punto en que comienza, es decir, que regresa a su posición original.	

Clasificación por parejas de ángulos⁶.

NOMBRE	CARACTERÍSTICAS	FIGURA
Adyacentes	Tienen un lado en común y el mismo vértice.	
Complementarios	Par de ángulos que sumados forman un ángulo recto, es decir, 90°	
Suplementarios	Par de ángulos que sumados forman un ángulo llano, es decir 180°	
Opuestos por el vértice	Sus lados forman dos pares de rayos opuestos. $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$	

⁶ Ídem.



Medida de ángulos

- <https://es.educaplay.com/recursos-educativos/7869349-angulos.html>
- <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/sismet/ejercicios-interactivos-de-medidas-de-angulos.html>



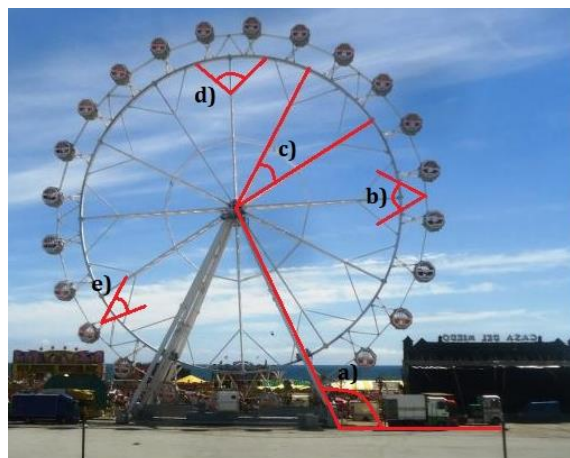
Actividad de aprendizaje 2

Ya que has recordado la clasificación de ángulos...

1. ¿Puedes indicar que ángulo es el mostrado al inicio de este tema (se muestra nuevamente la imagen)?



2. ¿Puedes encontrar y determinar estos ángulos a tu alrededor?; determina el valor de los ángulos mostrados en la siguiente imagen, e indica que tipo de ángulo es.



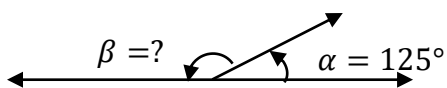
Ángulo	Medida	Tipo
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

⁷ <https://www.verpueblos.com/cataluna/barcelona/barcelona/foto/1267010/>

Ejemplo 1:

Toma en cuenta las clasificaciones de ángulos de las páginas anteriores, y veamos los siguientes ejemplos:

1)



Al observar la figura, se determina que es un ángulo llano, pero al mismo tiempo, representa un ángulo suplementario.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 125^\circ$$

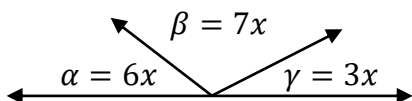
$$\therefore \alpha = 55^\circ$$

Para resolverlo, partimos que ambos ángulos suman 180° , es decir:

Y al conocer el valor de uno de los ángulos, y al sustituir este valor, simplemente despejamos la ecuación.

¿Sencillo no crees?, sólo hay que recordar que, para realizar un despeje, se utilizan las operaciones inversas.

2)



Subamos el nivel, en primer lugar, el ángulo de la figura, es un ángulo llano, el cual mide 180° , y al igual que en el ejemplo anterior, es un ángulo suplementario.

$$\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$$

$$6x + 7x + 3x = 180^\circ$$

Se establece una ecuación, la cual se iguala a cero; al sustituir los valores de los ángulos en la ecuación, procedemos a despejar el valor de "x", lo cual permitirá determinar el valor de los ángulos.

$$16x = 180^\circ$$

$$x = \frac{180^\circ}{16} = 11.25^\circ$$

Se suman las cantidades numéricas, puesto que son términos semejantes y se despeja el valor de "x"; este valor, permitirá determinar el valor de cada uno de los ángulos.

$$\text{Si } x = 11.25^\circ; \therefore$$

$$\angle \alpha = 6x$$

$$\angle \beta = 7x$$

$$\angle \gamma = 3x$$

$$\angle \alpha = 6(11.25^\circ) = 67.5^\circ$$

$$\angle \beta = 7(11.25^\circ) = 78.75^\circ$$

$$\angle \gamma = 3(11.25^\circ) = 33.75^\circ$$

Finalmente, se verifica el procedimiento, al sumar los tres ángulos el resultado debe ser 180° , ya que se trata de un ángulo suplementario.

$$\begin{aligned} \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma &= 180^\circ \\ 67.5^\circ + 78.75^\circ + 33.75^\circ &= 180^\circ \\ 180^\circ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Recuerda, se sustituye el valor de los ángulos α, β, γ ; y se resuelve la igualdad (una ecuación es una igualdad, es decir ambas partes de la ecuación, son iguales)

3)



$$(3x - 30^\circ) + (x + 10^\circ) = 90^\circ$$

$$3x - 30^\circ + x + 10^\circ = 90^\circ$$

$$3x + x - 30^\circ + 10^\circ = 90^\circ$$

$$4x - 20^\circ = 90^\circ$$

$$4x = 90^\circ + 20^\circ$$

$$4x = 110^\circ$$

$$x = \frac{110^\circ}{4} = 27.5^\circ$$

$$\begin{aligned} 3x - 30^\circ &= 3(27.5^\circ) - 30^\circ \\ &= 82.5^\circ - 30^\circ = 52.5^\circ \end{aligned}$$

$$x + 10^\circ = (27.5^\circ) + 10^\circ = 37.5^\circ$$

$$\begin{aligned} (3x - 30^\circ) + (x + 10^\circ) &= 90^\circ \\ 52.5^\circ + 37.5^\circ &= 90^\circ \\ 90^\circ &= 90^\circ \end{aligned}$$

Este ángulo es complementario, el cual es igual a 90° (ángulo recto), para resolverlo, establecemos una ecuación, para posteriormente despejar el valor de “x”, pon atención al procedimiento.

Los paréntesis permiten ver el valor de cada ángulo; y para eliminar el paréntesis, utilizamos la propiedad distributiva la multiplicar el signo que antecede a este signo de agrupación, por cada término dentro del paréntesis; se simplifica la ecuación, y se agrupan los términos semejantes, y recuerda respetar los signos; finalmente se despeja “x”, no se te debe olvidar aplicar las operaciones inversas.

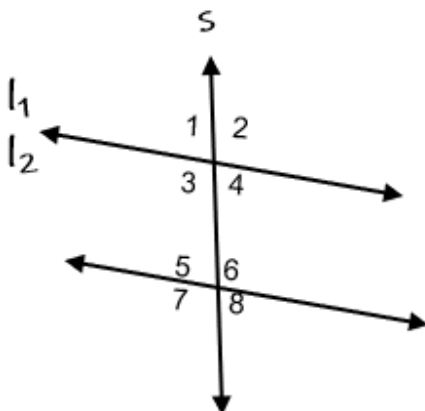
El valor encontrado, se sustituye de acuerdo con los valores designados de cada ángulo de acuerdo con el ejercicio.

Y verificamos el procedimiento realizado, ello a partir de la ecuación planteada de inicio, sustituyendo los valores de los ángulos.

Muy sencillo, ¿cierto?

Ángulos entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal

Teniendo como base los ángulos vistos hasta el momento, también encontramos que, al tener dos rectas paralelas cortadas por una transversal, se forman los siguientes pares de ángulos:

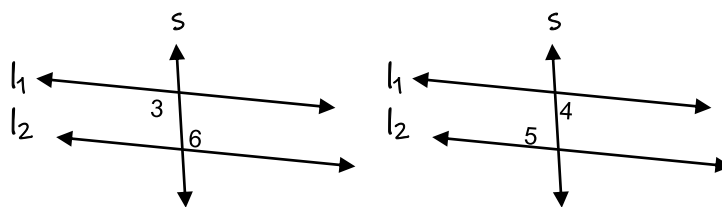


Una recta es transversal, al cortar a dos rectas paralelas en un mismo plano.

Y como se muestra en la figura, se forman ocho pares de ángulos, los cuales se describen a continuación.

Ángulos alternos internos⁸:

Son ángulos que se encuentran entre las rectas paralelas y en lados distintos de la transversal; y cada par de ángulos, tienen la misma medida; por lo tanto, los ángulos:



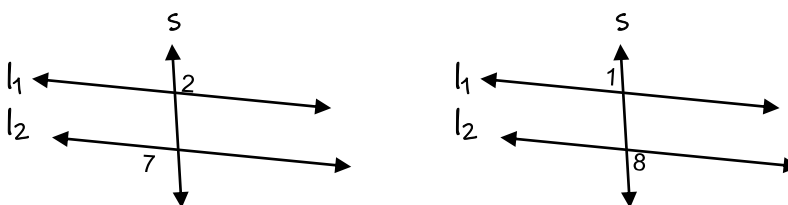
$$\angle 3 = \angle 6$$

$$\angle 4 = \angle 5$$

$\therefore \angle 3$ y $\angle 6$; $\angle 4$ y $\angle 5$, son ángulos alternos internos

Ángulos alternos externos:

Son aquellos ángulos que no se encuentran entre las rectas paralelas, y se encuentran en lados distintos de la transversal; estos pares de ángulos tienen la misma medida; es decir:



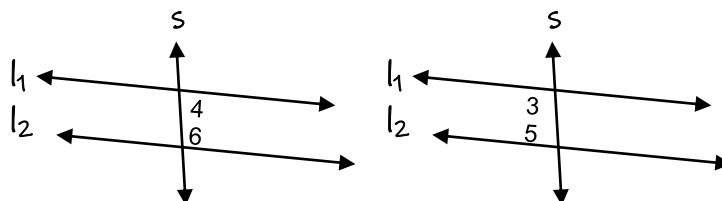
$$\angle 1 = \angle 8$$

$$\angle 2 = \angle 7$$

$\therefore \angle 1$ y $\angle 8$; $\angle 2$ y $\angle 7$, son ángulos alternos externos

Ángulos colaterales internos:

Son ángulos que encuentran entre las rectas paralelas y en el mismo lado de la transversal; y cada par de ángulos, son suplementarios; por lo tanto, los ángulos:



$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$$

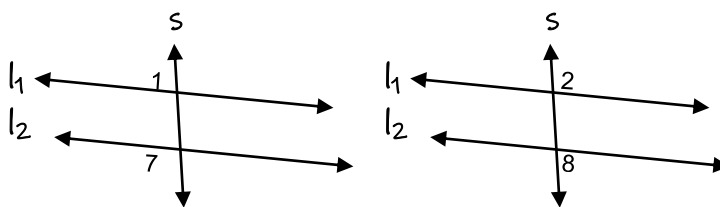
$$\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$$

$\therefore \angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$, son ángulos colaterales internos

⁸ Tomado de Matemáticas II Geometría y Trigonometría. Aldana M. Elena

Ángulos colaterales externos:

Son ángulos que no se encuentran entre las rectas paralelas, y se ubican en el mismo lado de la transversal; y cada par de ángulos, son suplementarios; por lo tanto, los ángulos:



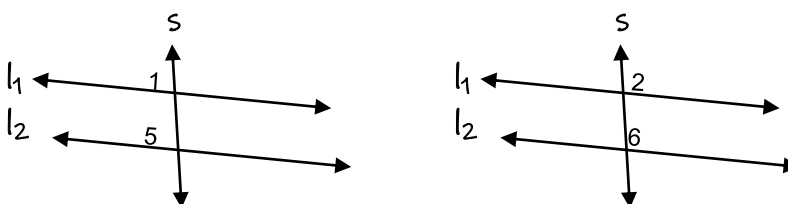
$$\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 8 = 180^\circ$$

$\therefore \angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$, son ángulos colaterales externos

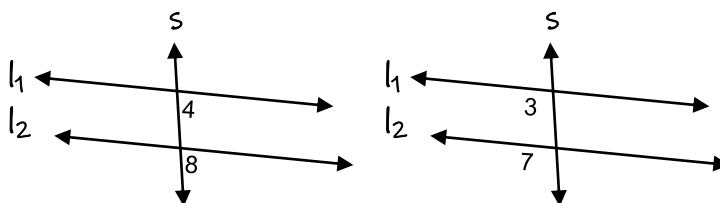
Ángulos correspondientes:

Son los ángulos ubicados en el mismo lado de la transversal, siendo un ángulo interno y otro externo; y cada par de ángulos miden lo mismo.



$$\angle 1 = \angle 5$$

$$\angle 2 = \angle 6$$



$$\angle 3 = \angle 7$$

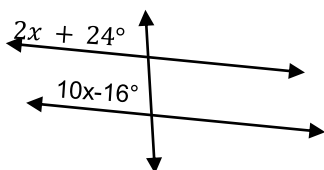
$$\angle 4 = \angle 8$$

$\therefore \angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 7$; $\angle 4$ y $\angle 8$, son ángulos correspondientes

Ejemplos

De acuerdo con los ángulos formados entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal, analiza los siguientes ejemplos:

1)



Los ángulos de este ejemplo son correspondientes, puesto que se encuentran del mismo lado de las rectas paralelas, y por lo tanto miden lo mismo, por lo tanto, los valores de los ángulos se igualan y procede a despejar el valor de x :

$$2x + 24^\circ = 10x - 16^\circ$$

$$2x + 24^\circ = 10x - 16^\circ$$

Se igualan los valores de los ángulos

$$2x - 10x = -16^\circ - 24^\circ$$

Se despeja el valor de x , recuerda que debes agrupar términos semejantes y utilizar las operaciones inversas para despejar.

$$-8x = -40^\circ$$

$$x = \frac{-40^\circ}{-8} = 5^\circ$$

$$2x + 24^\circ$$

$$2(5^\circ) + 24^\circ$$

$$10^\circ + 24^\circ = 34^\circ$$

El valor de x , es 5° ; este valor se debe sustituir en las dos expresiones que representan el valor de los ángulos.

$$10x - 16^\circ$$

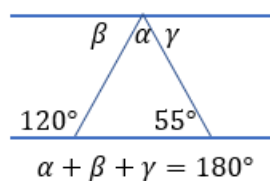
$$10(5^\circ) - 16^\circ$$

$$50^\circ - 16^\circ = 34^\circ$$

Por lo tanto, puedes ver que los ángulos tienen el mismo valor.

¿Te parece si aumentamos sólo un poco el nivel?, ¿cómo?, retomando todo lo anterior al tema de ángulos, ¡Vamos!!

2) Determine el valor de los ángulos α, β, γ :



Para resolver este ejemplo, debes tener presente que los ángulos α, β, γ , son ángulos suplementarios, es decir que suman 180° .

Ángulos alternos internos:

$$\therefore \gamma = 55^\circ$$

Ahora bien, los ángulos γ , y el ángulo de 55° , al encontrarse en distintos lados de la transversal, son ángulos alternos internos; por lo cual, miden lo mismo.

$$120^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\therefore \beta = 60^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Se sustituyen los valores de β y γ para determinar el valor α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + 60^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ$$

$$\alpha = 65^\circ$$

Los ángulos β y el de 120° , son ángulos colaterales internos, es decir que suman 180° ; lo cual, permite determinar el ángulo β :

Ya determinamos el valor de los ángulos β y γ , hace falta determinar el valor del ángulo α , recuerda que, al inicio, se determinó que los ángulos α, β, γ , suman 180° al ser suplementarios, por lo tanto:



- <https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/angulos-determinados-por-dos-rectas-paralelas-y-transversal/>

Videos

- <https://www.youtube.com/watch?v=Y2BjSS2JghA>
- https://www.youtube.com/watch?v=GKdFI6mWD5c&list=RDCMUCJok4N-aJSFTI63LJ16o9VQ&start_radio=1&t=7
- <https://www.youtube.com/watch?v=TLaNo0MAVHo>

Actividad de aprendizaje 3

1. ¿Puedes encontrar estos ángulos a tu alrededor?, ¿podrías determinar los ángulos que se forman?, si son ¿alternos internos, alternos externos, colaterales internos, colaterales externos o correspondientes?

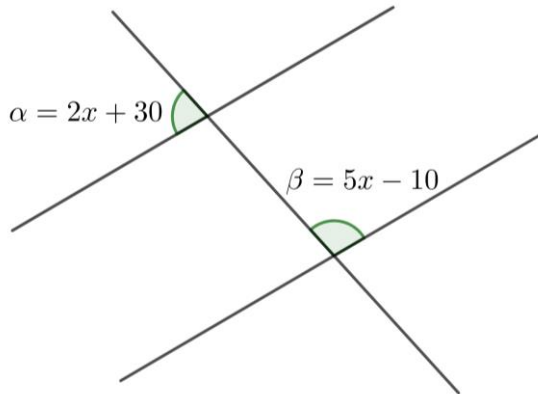
Aquí tienes un ejemplo:



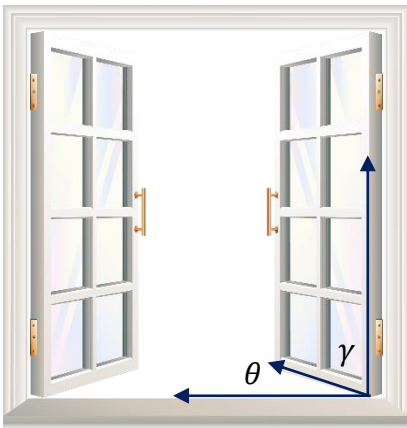
¿Estás listo?, es tu turno de resolver los siguientes ejercicios.

⁹ <https://www.pexels.com/es-es/>

2. Los cables de luz que tienden en la calle los empleados de CFE forman diferentes figuras en el aire. Determine los ángulos solicitados formados entre las líneas de cable.



3. Al abrir una ventana, se forman ángulos, determina el valor de los ángulos formados:



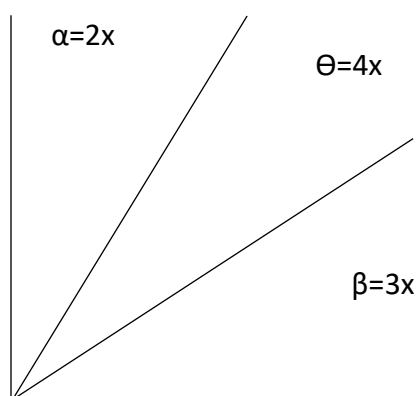
Si se sabe que:

$$\theta = 14x$$

$$\gamma = 6x$$

¹⁰ <https://pixabay.com/es/>

4. Determina el valor del ángulo θ si una fuente de agua forma los siguientes ángulos

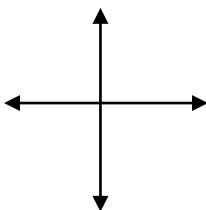


Sistemas angulares de medición

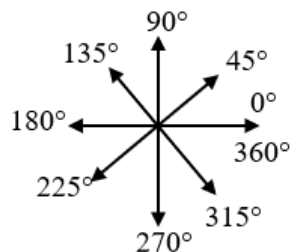
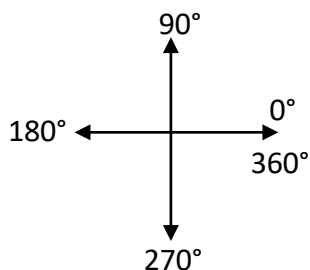
¿Tienes presente las medidas de medición de ángulos?, hasta el momento, hemos repasamos la clasificación de ángulos de acuerdo con su medida, y los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, así como algunos ejemplos, pero ¿Cómo se trazan y miden los ángulos?

Pues bien, los ángulos se trazan en sentido contrario a las manecillas del reloj; pero porque no realizamos la siguiente actividad, ello te permitirá comprender de una manera práctica cómo trazar, medir y además que es un radian, la otra unidad de medida de los ángulos, además de los ya conocidos grados. ¡¡Vamos!!

Traza en tu libreta un plano cartesiano, indicando sólo los cuadrantes, es decir:

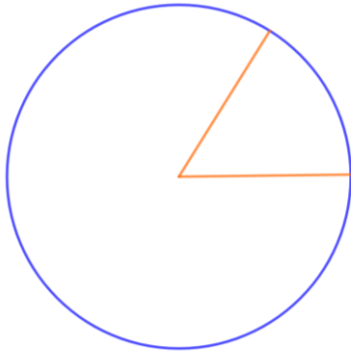


Ahora marca los grados en lugar de los cuadrantes, recuerda que es en sentido contrario a las manecillas del reloj: Añade o indica ángulos de 45° , esto es:



¡Hey!, pero se nos olvida algo importante, ¿qué es un radian?; pues bien, al trazar un ángulo en una circunferencia, uno de los lados del ángulo trazado, corresponde al arco de este ángulo, es decir que tienen la misma medida.

¿Cuál es la relación entre el radian y el valor de Pi (π)?, es una pregunta muy interesante, para ello, veamos las siguientes figuras.

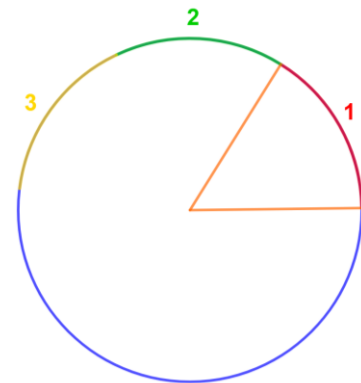


Si se toma la medida de uno de los lados del ángulo (es decir el radio), y se posiciona en el arco formado, veremos que tienen la misma medida.

Ahora bien, al colocar el arco sobre el círculo, nos daremos cuenta que, al visualizar el diámetro de la circunferencia, tendremos que este “cabe” tres veces y queda un pequeño espacio, el cual tiene un valor aproximado de 3.14, así es, es el valor de Pi (π).

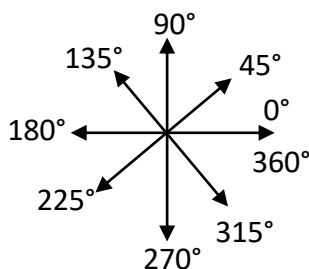
El arco se ha posicionado en tres ocasiones, por lo cual, se deduce:

$$\pi = 3.14$$



Entonces un radian es cuando el radio de la circunferencia, el cual es el lado de un ángulo trazado dentro de él, es igual a su arco.

Con esta explicación, podemos determinar lo siguiente:



Si $180^\circ = \pi$; $\therefore 360^\circ = 2\pi$; podemos deducir:

Si 90° , es la mitad de 180° , entonces: $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, por lo que resumimos:

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$90^\circ = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

$$180^\circ = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

$$270^\circ = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

$$360^\circ = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$

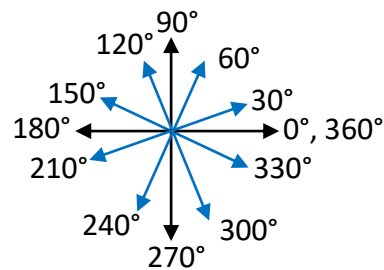
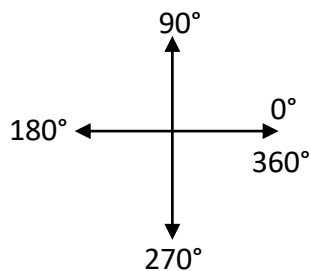
Para 90° , 180° , 270° y 360° , se simplifica.

Para determinar la referencia de grados a radianes, toma de base 180° , el cual como se mencionó anteriormente equivale a π ; y al dividir entre cuatro, corresponde a 45° , el cual es igual a:

$$\frac{\pi}{4}$$

Es decir que, 45° , 90° , 135° equivale a una cuarta parte, $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$ respectivamente; y esto se considera para 225° , 270° , 315° ; siendo: $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{7}{4}$ respectivamente.

Ahora bien, volvamos a la imagen de inicio, y ahora traza ángulos de 30° .



Recuerda, 90° , es la mitad de 180° , por lo cual: $90^\circ = \frac{\pi}{2}$; por lo que resumimos:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$90^\circ = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$120^\circ = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

$$180^\circ = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

Para 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° y 360° , se simplifica.

Para determinar la referencia de grados a radianes, toma de base 180° , el cual como se mencionó anteriormente equivale a π ; y ahora al dividir entre seis, corresponde a 30° , el cual es igual a:

$$\frac{\pi}{6}$$

Es decir que, 30° , 60° , 90° , 120° , 150° equivale a una sexta parte, $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{5}{6}$ respectivamente; y esto mismo se considera para 210° , 240° , 270° , 300° , 330° ; siendo: $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{11}{6}$ respectivamente.

$$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

$$240^\circ = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$270^\circ = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$300^\circ = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$$

$$360^\circ = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

Como ves, es realmente sencillo realizar la conversión de grados a radianes con el apoyo de la construcción del círculo unitario; pero también se puede realizar la conversión de grados a radianes y viceversa, ello partiendo de la equivalencia:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Al despejar, tenemos:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ grados}$$

Aplica tus conocimientos:

En los siguientes ejercicios, se determinará ya sea al aplicar el círculo unitario, que, de acuerdo con los grados, este en radianes sea aproximado (también puede ser a la inversa), que se obtiene el mismo resultado que al aplicar las equivalencias obtenidas.

Convertir 270° a radianes:

Círculo unitario	Equivalencia	
	$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$	
$270^\circ = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	<i>Explicación:</i> Se multiplica por $\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$. $270^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) = \frac{270^\circ(\pi)}{180^\circ} = \frac{27\pi}{18} = \frac{3\pi}{2}$	Se eliminan los grados, y se quedan los radianes, y se simplifica a la mínima expresión (eliminando los ceros y dividiendo entre 9, numerador y denominador).

Como puedes darte cuenta, son dos formas para convertir de grados a radianes; veamos otros ejemplos.

Convierte en radianes 15° , 25° y 55°

Equivalencia:

$$(15^\circ) \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) =$$

Se multiplican los grados por la equivalencia para convertir a radianes.

$$\frac{15\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{36} = \frac{\pi}{12}$$

Se simplifica el resultado, dividiendo el numerador y el denominador entre cinco; y finalmente entre 3.

$$(25^\circ) \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) =$$

Se multiplican los grados por la equivalencia para convertir a radianes.

$$\frac{25\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{36}$$

Para simplificar el resultado, se divide el numerador y el denominador entre cinco.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$$

$$(55^\circ) \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) =$$

Se multiplican los grados por la equivalencia para convertir a radianes.

$$\frac{55\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{36} = \frac{\pi}{12}$$

Se simplifica el resultado, dividiendo el numerador y el denominador entre cinco.

NOTA: Estos ejemplos coinciden al dividir para simplificar entre cinco el numerador y el denominador, es decir, que no siempre se divide entre cinco.

Ejemplos

Convierte de radianes a grados:

$$\text{Equivalencia: } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ grados}$$

1)

$$\frac{\pi}{5}$$

$$\left(\frac{\pi}{5} \right) \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)$$

Se multiplica por la equivalencia

$$\left(\frac{\cancel{\pi}}{5} \right) \left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}} \right) = \frac{180^\circ}{5}$$

Se elimina el valor de π

$$\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

Y se resuelve la división

2)

$$\frac{\pi}{7}$$

$$\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$$

Se multiplica por la equivalencia

$$\left(\cancel{\frac{\pi}{7}}\right)\left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\right) = \frac{180^\circ}{7}$$

Se elimina el valor de π

$$\frac{180^\circ}{7} = 25.71^\circ$$

Y se resuelve la división



- https://www.redi.codeic.unam.mx/lecciones/lecciones/geo/2_174/index.html

Actividad de aprendizaje 4

1. Con el apoyo del círculo unitario trazado, puedes determinar la equivalencia de 250° a radianes, ¿se obtendrá el mismo resultado que al utilizar las equivalencias mostradas anteriormente?
2. Realiza las siguientes conversiones de radianes a grados y viceversa según sea el caso:
 - a) 270° a radianes
 - b) 35° a radianes

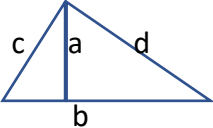
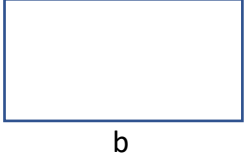
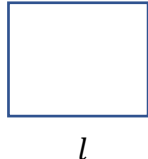
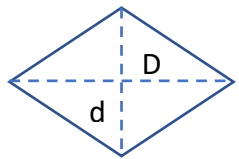
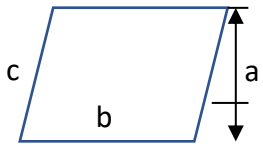
c) $\frac{3\pi}{6}$ a grados

d) $\frac{5\pi}{9}$ a grados

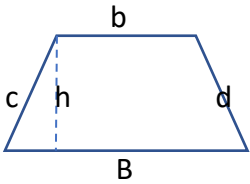
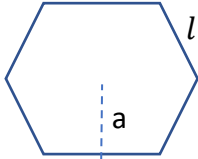
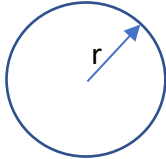
Patrones y fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

Recuerda para determinar el perímetro de una figura, se suman las longitudes de sus lados; para su área se multiplican sus lados; y para el volumen, se multiplican los lados por la profundidad, esto se puede aplicarse a cuadrados, rectángulos, triángulos; pero ¿qué ocurre con figuras más complejas?, para ello, se recurre a las siguientes fórmulas ya establecidas:

Perímetro y área de polígonos¹¹

Nombre	Perímetro	Área	Figura
Triángulo	$P = b + c + d$	$A = \frac{bh}{2}$ $A = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-d)}$ $s = \frac{P}{2}$	
Rectángulo	$P = 2a + 2b$	$A = b(a)$	
Cuadrado	$P = 4(l)$	$A = l^2$	
Rombo	$P = 4(l)$	$A = \frac{Dd}{2}$	
Romboide	$P = 2a + 2b$	$A = b(a)$	

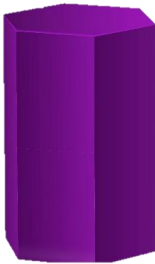
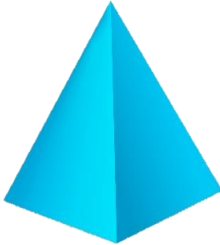
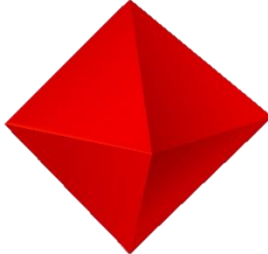
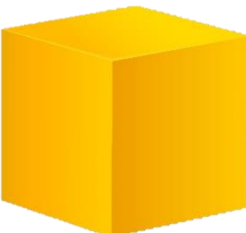
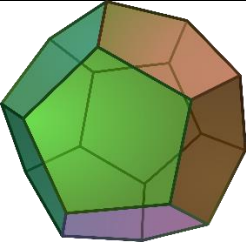
¹¹ Tomado de Matemáticas II Geometría y Trigonometría. Aldana M. Elena

Nombre	Perímetro	Área	Figura
Trapecio	$P = B + b + c + d$	$A = \frac{(B + b)h}{2}$	
Polígono regular	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$ <i>P = perímetro</i> <i>a = apotema</i>	
Circunferencia	$P = \pi d$ $P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$	

Área y volumen de poliedros

Nombre	Área	Volumen	Figura ¹²
Cilindro	$A = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2(h)$	
Esfera	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}(\pi)r^3$	
Cono	$A = \pi r^2 + \pi(r)g$	$V = \frac{(\pi)(r^2)(h)}{3}$	

¹² <https://www.freepik.es/>

Nombre	Área	Volumen	Figura ¹²
Prisma	$A = 2(Ab) + Al$ $Al = (n)(l)(h)$	$V = (Ab)(h)$	
	$Ab = \text{área de la base}$ $Al = \text{área lateral}$ $h = \text{altura}$ $n = \text{número de lados}$ $l = \text{longitud del lado}$		
Poliedros regulares			
Tetraedro	$A = 1.7321a^2$	$V = 0.1178a^3$	
Octaedro	$A = 3.4642a^2$	$V = 0.4714a^3$	
Cubo	$A = 6a^2$	$V = a^3$	
Dodecaedro	$A = 20.6457a^2$	$V = 7.6631a^3$	
Icosaedro	$A = 8.6605a^2$	$V = 2.1817a^3$	

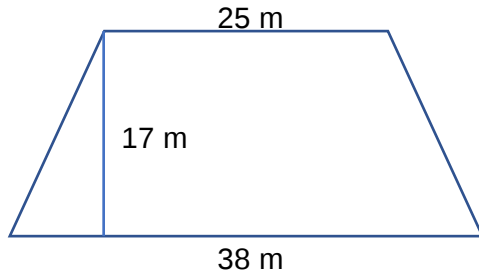
13

¹² <https://pixabay.com/es/>

Ejemplos:

De acuerdo con las fórmulas vistas, se resolverán los siguientes ejemplos:

1.- Determine el área de la siguiente figura.



Fórmula para determinar el área de un trapecio.

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Datos:

$$B = 38 \text{ m}; b = 25 \text{ m}; h = 17 \text{ m}$$

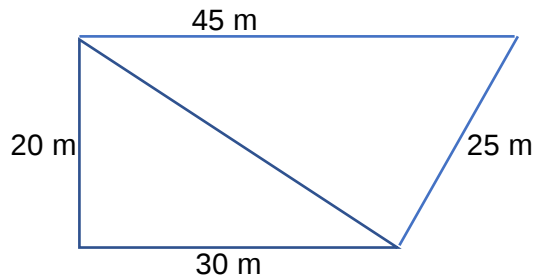
Sustituyendo los valores, y se resuelven las operaciones:

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(38 + 25)17}{2} = \frac{(63)17}{2}$$

$$A = \frac{1\,071 \text{ m}^2}{2}$$

$$A = 535.5 \text{ m}^2$$

2.- Determine el área de la figura¹⁴:



Para obtener el área, es necesario determinar el valor de la diagonal, la cual, es a su vez, es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Por lo cual, para determinar la hipotenusa:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$C = \sqrt{(20)^2 + (30)^2} = \sqrt{400 + 900} = \sqrt{1300} = 36.05 \text{ m}$$

¹⁴ Ejemplo tomado de Tomado de Matemáticas II Geometría y Trigonometría. Aldana M. Elena

Área del triángulo de abajo:

$$A = \frac{Bh}{2} = \frac{(30\text{ m})(20\text{ m})}{2} = \frac{600\text{ m}^2}{2} = 300\text{ m}^2$$

Área del segundo triángulo:

Se debe obtener el perímetro:

$$P = 45\text{ m} + 25\text{ m} + 36.05\text{ m}$$

$$P = 106.05\text{ m}$$

Se determina el valor de semi perímetro

$$s = \frac{P}{2} = \frac{106.05\text{ m}}{2} = 53.025\text{ m}$$

Ahora se calcula el área

$$A = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-d)}$$

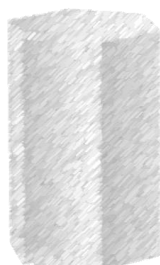
$$A = \sqrt{53.025(53.025 - 45)(53.025 - 25)(53.025 - 36.05)}$$

$$A = \sqrt{53.025(8.025)(28.025)(16.975)} = \sqrt{202\,432.912} = 449.92\text{ m}^2$$

Finalmente, el área total es:

$$A_T = 300\text{ m}^2 + 449.92\text{ m}^2 = 749.92\text{ m}^2$$

3.- Determine el área y el volumen del siguiente poliedro:



15

$$A = 2(Ab) + Al$$

$$Ab = \text{área de la base}$$

$$Al = \text{área lateral}$$

$$h = \text{altura}$$

Datos:

$$h = 6\text{ cm}$$

$$\text{apotema} = 2.5\text{ cm}$$

$$\text{Lado} = 1.5\text{ cm}$$

$$V = (Ab)(h)$$

Procedimiento:

Hay que determinar el área de la base y el área lateral:

Área de la base.

La base es un hexágono, se sustituyen los valores en la fórmula del perímetro y después se obtiene el área.

$$P = nl = (6)(1.5\text{ cm}) = 9\text{ cm}$$

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{(9\text{ cm})(2.5\text{ cm})}{2} = \frac{22.5\text{ cm}^2}{2} = 11.25\text{ cm}^2$$

Área lateral.

Se sustituyen los valores de la figura en la fórmula.

$$Al = (n)(l)(h)$$

$$Al = (6)(1.5\text{ cm})(6\text{ cm}) = 54\text{ cm}^2$$

Área del poliedro.

Se determina el área del poliedro

$$A = 2(Ab) + Al$$

$$A = 2(11.25\text{ cm}^2) + 54\text{ cm}^2 = 22.5\text{ cm}^2 + 54\text{ cm}^2$$

$$A = 76.5\text{ cm}^2$$

¹⁵ <https://www.freepik.es/>



- <https://www.intermatia.com/ejercicios.php>
- <https://www.youtube.com/watch?v=TLaNo0MAVHo>
- https://www.youtube.com/watch?v=W5yMHQXpoQs&list=PLeySRPnY35dH7FRomUY4UhhFJ-AMNin_5
- <https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=U7S9wZiFawk>

Actividad de aprendizaje 5

¿Has notado estas figuras a tu alrededor?, te has preguntado: ¿cuál es el área de la cancha de futbol de tu plantel?, o ¿el volumen de tu cuarto?

1. Determina el área de la cancha de futbol americano mostrada en la imagen:



*Sugerencia:
Recuerda consultar las
fórmulas para el área y el
volumen de figuras*

16

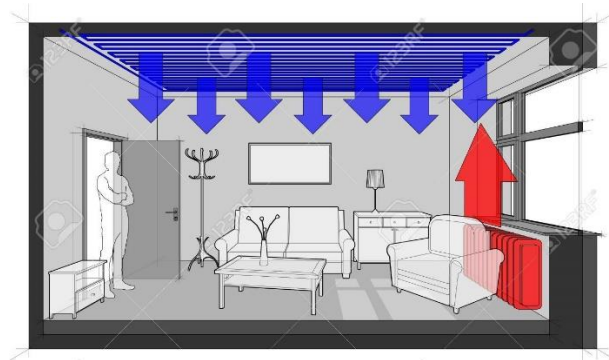
2. Determina el volumen de la habitación mostrada en la imagen, tiene las siguientes dimensiones:

Largo: 4.5 m

Ancho: 4 m

Altura: 2.4 m

Determina su volumen



17

¹⁶ <https://pastosinteticoprecio.com/cancha-de-futbol-americano/>

¹⁷ <https://es.dreamstime.com/el-radiador-calent%C3%B3-sitio-con-enfriamiento-y-muebles-del-techo-image100361475>

Durante el desarrollo del Corte de aprendizaje I, se plantearon preguntas que te animaron a reflexionar acerca de los conceptos básicos de la geometría, cómo medir ángulos, y determinar el perímetro, áreas y volúmenes de figuras geométricas; ahora determina tu desempeño acerca de lo que aprendiste.

Actividad	Realizado	Debo poner más empeño, porque...
Destiné un tiempo para resolver esta guía		
Fui realizando los procedimientos de los ejercicios resueltos		
Consulté mis apuntes para comprender y reforzar mis aprendizajes		
En el apartado: <i>Actividad para reflexionar</i> , ¿me detuve a leerlo y a reflexionar lo cuestionado?		
Consulte las páginas del apartado <i>¿Quieres conocer más?</i> Para reforzar mis conocimientos		



En esta sección se mencionarán las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para realizar el material. La información deberá aparecer por corte.

1. Aldana Ortiz, M. (2006). Matemáticas II. Geometría y Trigonometría. Segunda Edición. México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. SEP.
2. Fuenlabrada Trucios, S. (2007) Geometría y Trigonometría. Cuarta Edición. México: Mc Graw Hill Education.
3. Guzmán Herrera, Abelardo. (1991) Geometría y Trigonometría. Cuarta Edición. México: Publicaciones Cultural.
4. Ávila Anaya S. Apuntes personales.
5. Guía para presentar exámenes de recuperación o de acreditación especial. (Apoya a Plan 1992) Matemáticas III. Colegio de Bachilleres. https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_III.pdf
6. Imágenes gratis para descargar (sin derecho de autor): <https://pixabay.com/es/>
7. Imágenes gratis para descargar (sin derecho de autor): <https://www.freepik.es/>
8. Imágenes gratis para descargar (sin derecho de autor): <https://www.pexels.com/es-es/>

CORTE

2



Congruencia y semejanza de triángulos

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos

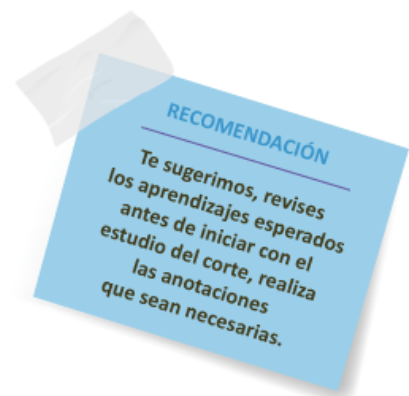
- Criterios de congruencia de Triángulos
- Teorema de Tales y semejanza de triángulos

Aprendizajes esperados.

- Significa los criterios de congruencia de triángulos constructivamente mediante distintos medios.
- Interpreta visual y numéricamente al Teorema de Tales en diversos contextos y situaciones cotidianas.



Al finalizar este corte comprenderás las propiedades y teoremas de semejanza y congruencia de los triángulos para aplicarlos en el planteamiento e interpretación de la solución de problemas de su entorno.



Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 2 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Polígonos
- Medida de ángulos
- Notación de puntos y rectas
- Notación de triángulos
- Proporcionalidad
- Rectas paralelas
- Despeje de variables

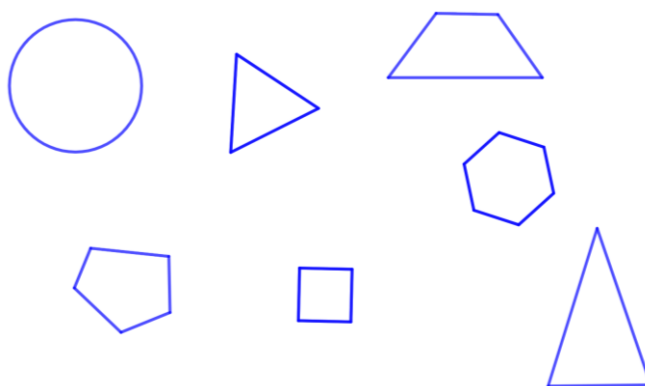


Identifica lo que debes
saber para que la
comprensión de los
contenidos sea más fácil,
si descubres que has
olvidado algo ¡repásalo!

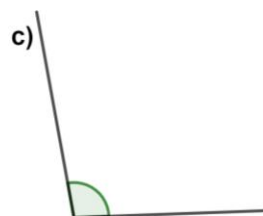
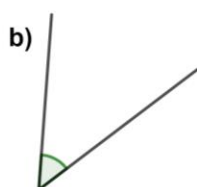
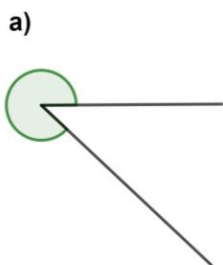
Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

1. ¿Qué es un polígono?
2. ¿Qué es un polígono regular?
3. ¿Qué es un polígono irregular?
4. Menciona por lo menos 3 tipos de polígonos.

5. Marca con una **X** los polígonos regulares del siguiente conjunto.



6. Determina la medida de los siguientes ángulos.



Ángulo	Medida
a)	
b)	
c)	

7. Define que es una recta.

8. Describe con tus palabras qué son las rectas paralelas.- Realiza un dibujo de ellas.

9. Despeja la literal solicitada en cada expresión.

a) h , de $A = \frac{B+b}{2}h$

b) b , de $A = \frac{b}{c}$

c) a , de $c^2 = a^2 + b^2$

d) T_1 , de $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

10. Analiza y da solución al siguiente problema:

Dos de cada cinco asistentes a un evento son mujeres. ¿Cuántas mujeres en 800 asistentes



- <https://youtu.be/gGA71O89mHg>
- <https://youtu.be/HX1LKGUv4D8>
- Baldor, A. (2004). Geometría plana y del espacio y trigonometría. Vigésima reimpresión México: Publicaciones Cultural.
- Clemens, E. (2004). Geometría. México: Pearson
- Filloy, E., Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana

A continuación, encontrarás una serie de conceptos que serán el apoyo para lograr el propósito del corte 2.

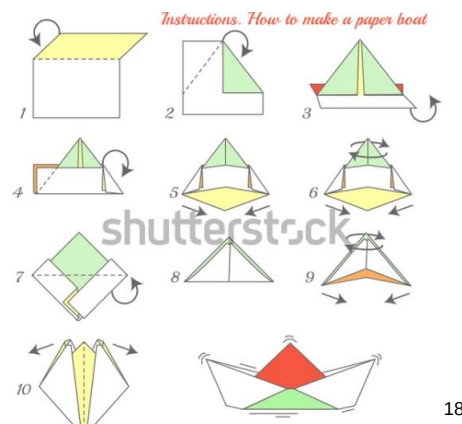
Congruencia de triángulos

¿Sabes el significado de congruencia? En Geometría la palabra congruencia se utiliza para comparar dos o más figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño. Una situación ilustrativa es la comparación de tus manos, ambas coinciden en forma y tamaño. En la vida diaria puedes encontrar muchas figuras que son congruentes, enlista cinco de ellas a continuación:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Y aunque parece muy sencillo poder determinar cuáles son las figuras congruentes, no siempre es tan simple, todas las hojas de un árbol parecen ser iguales, sin embargo, al compararlas resulta que no tienen exactamente el mismo tamaño o tienen formas similares, pero no exactas, por lo que se utilizan criterios más concretos con el fin de asegurar que dos figuras son congruentes. En el caso de los triángulos, existen tres criterios de congruencia: Lado-Ángulo-Lado (LAL), Lado-Lado-Lado (LLL) y Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

Antes de analizar los criterios antes mencionados, construye con una hoja de papel un barquito siguiendo el siguiente diagrama:



18

¹⁸ <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/instructions-how-make-paper-ship-tutorial-284302658>

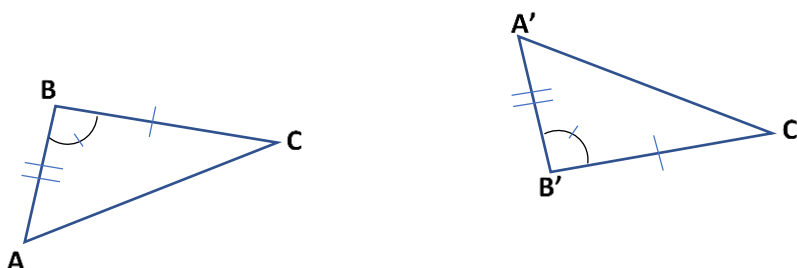
Con el barquito terminado, en los dobleces del papel ¿puedes encontrar triángulos que tengan la misma forma y la misma medida, es decir, triángulos congruentes?, ¿cuántos triángulos reconoces? Si te ayuda puedes remarcarlos con marcador. Muestra fotos de los triángulos encontrados.

¿Cómo puedes asegurar que los triángulos que encuentraste son congruentes? Lee la definición de los criterios de congruencia para que sepas cómo poder afirmar que los triángulos que encontraste son congruentes.

Congruencia de Triángulos

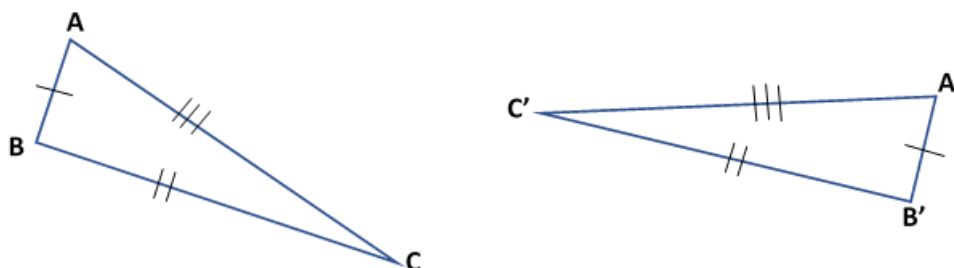
Primer criterio de Congruencia: Lado-Ángulo-Lado o LAL

Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de la misma medida son triángulos correspondientes.



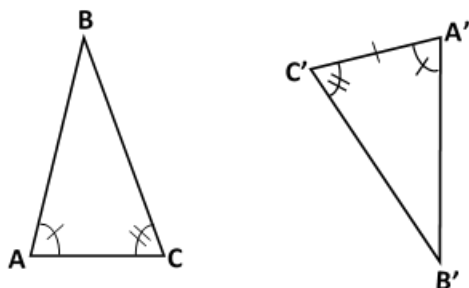
Segundo criterio de Congruencia: Lado-Lado-Lado (LLL)

Dos triángulos que tienen con tres lados de la misma medida son triángulos correspondientes.



Tercer criterio de Congruencia: Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

Dos triángulos con un lado de la misma medida y sus dos ángulos adyacentes iguales, son triángulos congruentes.



Observa los pares de triángulos con los que se ilustra la congruencia. Las marcas que tienen los lados correspondientes (AB y A'B'), indican que tienen la misma medida, lo mismo pasa con los ángulos.



- [http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_V/Applets_Geogebra/congrutria.html#:~:text=Dos%20tri%C3%A1ngulos%20son%20congruentes%20si,correspondientes%20tienen%20la%20misma%20medida.&text=Criterio%20\(Lado%2C%20%C3%81ngulo%2C%20Lado,%C3%A1ngulo%20comprendido%20entre%20ellos%20congruentes](http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_V/Applets_Geogebra/congrutria.html#:~:text=Dos%20tri%C3%A1ngulos%20son%20congruentes%20si,correspondientes%20tienen%20la%20misma%20medida.&text=Criterio%20(Lado%2C%20%C3%81ngulo%2C%20Lado,%C3%A1ngulo%20comprendido%20entre%20ellos%20congruentes)

Actividad de aprendizaje 1

- I. Ilustra cada uno de los Criterios con los triángulos encontrados en la construcción del barco de papel, incluye las medidas de los lados y los ángulos en la comparación.

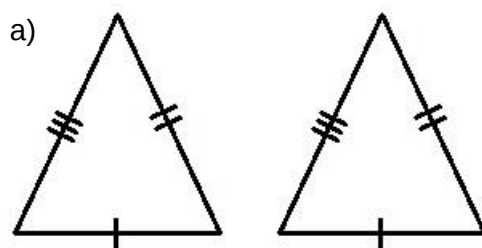
LAL

ALA

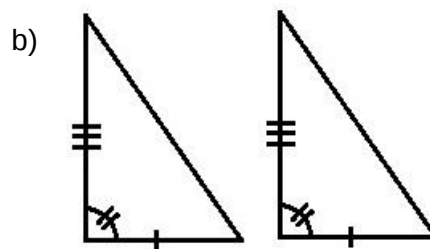
LLL



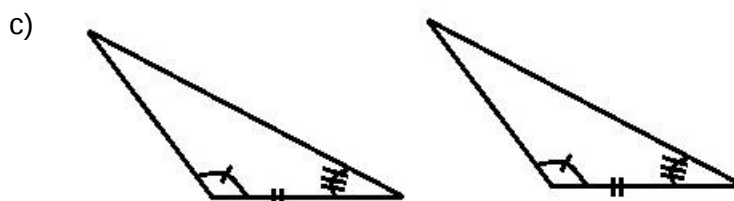
II. Identifica que tipo de congruencia (LAL, ALA, LLL) se maneja sobre cada par de triángulos:



Criterio: _____



Criterio: _____

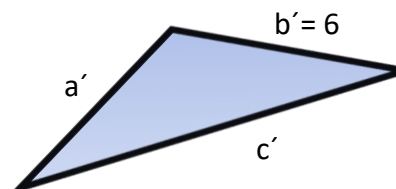
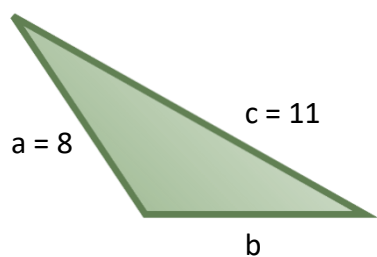


A)

Criterio: _____

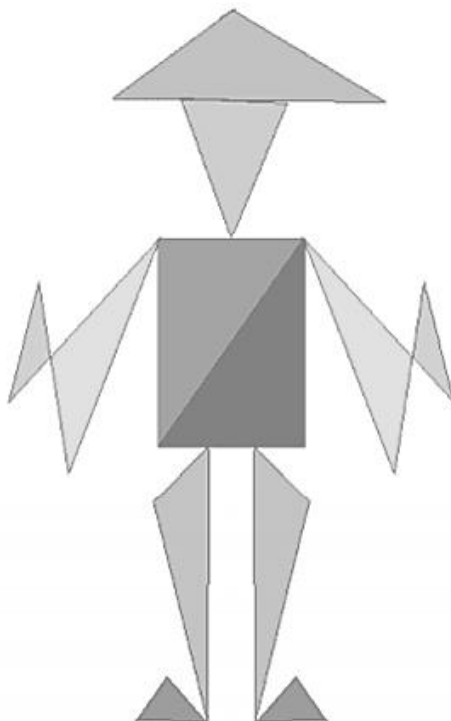
Actividad de aprendizaje 2

Si los siguientes triángulos son congruentes, encuentra el valor de a' , b y c .



Actividad de aprendizaje 3

En la siguiente figura, identifica con color los pares de triángulos que consideras congruentes, márcalos o coloréalos con color, posteriormente mide sus lados y ángulos para poder compararlos a través de los criterios de congruencia.



19

Criterio LLL

Triángulo 1	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

Triángulo 2	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

¿Coinciden las medidas de lados y ángulos en ambos triángulos?

Conclusión:

¹⁹ <https://slideplayer.es/slide/13731002/>

Criterio LLL

Triángulo 1	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

Triángulo 2	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

¿Coinciden las medidas de lados y ángulos en ambos triángulos?
Conclusión:

Criterio ALA

Triángulo 1	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

Triángulo 2	
Medida Lado 1:	
Ángulo	
Medida lado 2:	

¿Coinciden las medidas de lados y ángulos en ambos triángulos?
Análisis:

Teorema de Tales

Tales de Mileto fue un filósofo y matemático griego que entre sus muchas aportaciones formuló un teorema que hasta nuestros días sigue utilizándose para determinar la medida de los lados de triángulos semejantes.

Recuerda:

Se dice que son triángulos semejantes a aquellos que tienen la misma forma, pero diferente tamaño, dicho de otra manera, los ángulos de triángulos semejantes miden lo mismo, y el tamaño de sus lados son proporcionales.

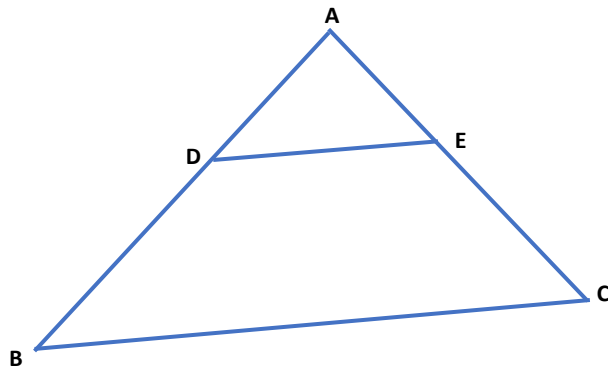
Cuenta la historia que Tales utilizó su famoso teorema para determinar la altura de la Pirámide de Keops, la cual es tan alta que es prácticamente imposible de medir mediante procedimientos físicos. Lo hizo mediante la medición de la sombra de la pirámide y comparándola con su propia sombra a la misma hora del día.

El teorema consiste en comparar proporcionalmente las medidas de los lados correspondientes de triángulos semejantes y específicamente dice,

Teorema de Tales

Si en un triángulo ABC se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene otro triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primer triángulo.

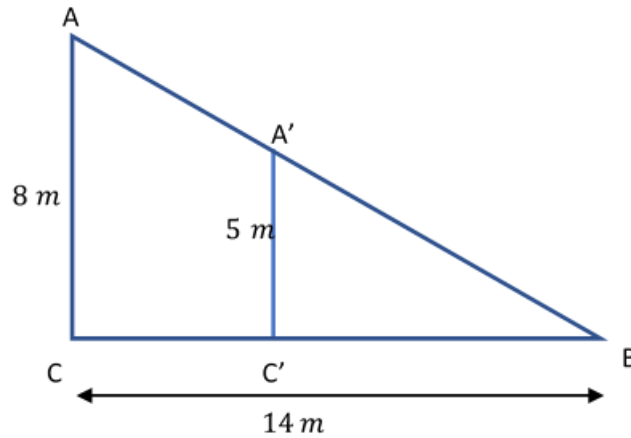
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$



Al aplicar el teorema anterior a situaciones que involucran triángulos semejantes, podemos calcular distancias inaccesibles, o facilitar la determinación de longitudes. A continuación, se presenta un ejemplo.

Se presenta el triángulo ABC, se traza una línea paralela al lado $\overline{AC}$. Con las medidas dadas, calcula la medida del lado $\overline{BC'}$

Ya que AC es paralela a A'C', se forman un par de triángulos semejantes ABC y A'BC', por lo que se pueden establecer la proporcionalidad entre sus lados correspondientes.



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}$$

La proporcionalidad entre los lados se plantea considerando los lados correspondientes entre ambos triángulos, los datos proporcionados y la incógnita del problema.

En particular, al observar ambos triángulos, tienen la misma forma tomándolo como base para realizar la comparación.

¿Por qué se toman los lados del ejemplo? Se toman AC y A'C' porque se tienen ambas medidas, y se toman BC y BC' porque se tiene la medida del primero y el segundo es la incógnita.

$$\frac{8}{5} = \frac{14}{\overline{BC'}}$$

El siguiente paso consiste en sustituir los datos que se tienen en la expresión planteada.

$$\frac{8}{5} = \frac{14}{\overline{BC'}}$$

Se realiza la multiplicación cruzada de los términos, 8 por BC' y 5 por 14

$$8\overline{BC'} = 5(14)$$

$$\overline{BC'} = \frac{70}{8}$$

Finalmente, se despeja BC', obteniendo así su valor 8.75 metros.

$$\overline{BC'} = 8.75 \text{ m}$$

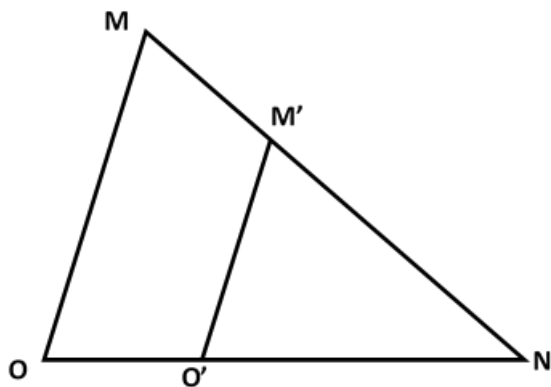


- <https://es.khanacademy.org/math/geometria-pe-pre-u/x4fe83c80dc7ebb02:semejanza-de-triangelos/x4fe83c80dc7ebb02:teorema-de-ales/v/teorema-de-ales-matematicas-khan-academy-en-espaol>.
- https://aprende.org/pages.php?r=.portada_course_view&programID=matematicas&tagID=1168&load=3349&n=8.
- https://aprende.org/pages.php?r=.portada_course_view&programID=matematicas&tagID=1168&load=3350&n=8.
- https://aprende.org/pages.php?r=.portada_course_view&programID=matematicas&tagID=1168&load=4845&n=8.
- <https://www.quao.org/sites/default/files/Teorema%20de%20Thales.pdf>.
- <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-del-teorema-de-thales.html>.
- <https://www.youtube.com/watch?v=-MplVMcxOEY>.

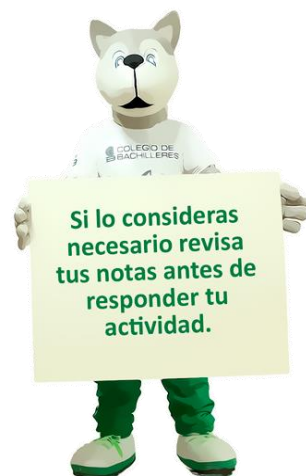
Actividad de aprendizaje 4

Completa la relación de proporcionalidad de los lados de los siguientes triángulos semejantes:

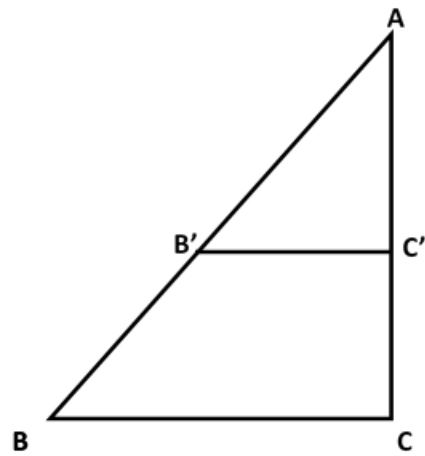
A)



$$\frac{\text{---}}{\text{---}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{M'N}} = \frac{\text{---}}{\text{---}}$$

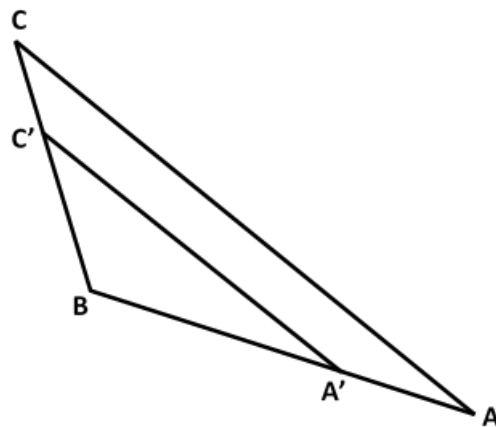


B)



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

C)

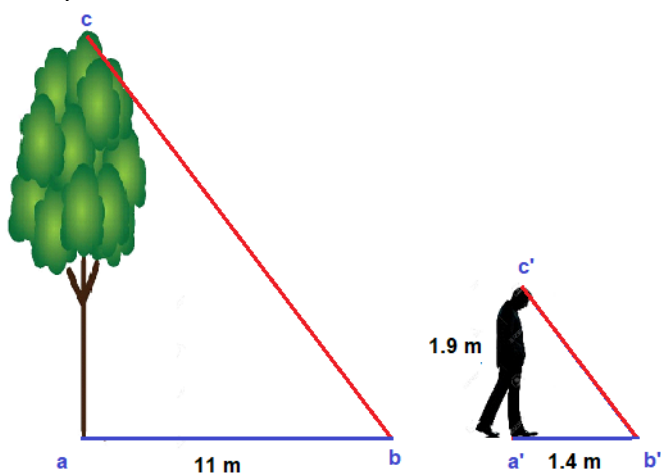


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Actividad de aprendizaje 5

Determina la medida del lado que se te solicita en cada caso.

A) Determina la altura del árbol, considerando los datos de la figura.

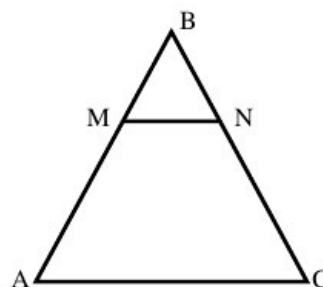


B) Determina el valor del segmento $\overline{AM}$.

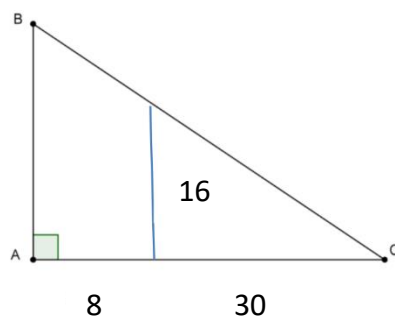
$$\text{Si } \overline{AB} = 14$$

$$\overline{BC} = 18$$

$$\overline{BN} = 9$$

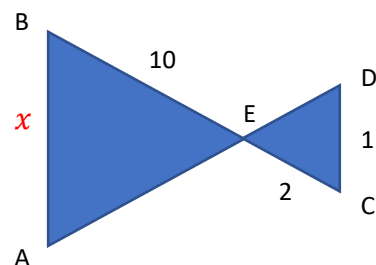


C) Determina el valor del segmento $\overline{AB}$.²⁰



²⁰ Modificado de Guía de Matemáticas. Colegio de Bachilleres Plantel 19 "Ecatepec".

- D) Establece la proporcionalidad entre los lados correspondientes en los lados homólogos en los dos triángulos de la figura y halla el valor de x . Considera que el segmento $\overline{AB}$ es paralelo ($\parallel$) al segmento $\overline{CD}$.



En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte 2.

Aspecto para considerar	Si	No	Cómo puedo realizarlo mejor
Organicé el tiempo de estudio para la realización de esta guía.			
Realicé una lectura activa de los ejemplos de la guía.			
Procuré eliminar las distracciones para realizar las actividades.			
Realicé anotaciones a lo largo del desarrollo de la guía.			
Consulté las fuentes sugeridas para los temas que representaron mayor dificultad.			
Desarrollé detalladamente las actividades de aprendizaje sugeridas.			
En caso necesario, busqué y realicé más ejercicios para reforzar mi aprendizaje.			

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

Libros

- Baldor, A. (2004). Geometría plana y del espacio y trigonometría. Vigésima reimpresión México: Publicaciones Cultural.
- Clemens, E. (2004). Geometría. México: Pearson
- Filloy, E., Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Publicaciones

- Guía de Estudio para Examen de Evaluación de Recuperación Plan 2018. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 2 “Cien metros”
<https://guiasbach2.webcindario.com/pagina8.html>
- Guía para círculo de estudio, grupo de estudio y examen directo. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 7 “Iztapalapa”
<https://drive.google.com/file/d/16pMCqFYjCHXsGe0HbDZ56DzIfwwlmEBg/view>
- Guía de estudio para presentar el examen extraordinario. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 8 “Cuajimalpa”
<https://drive.google.com/file/d/1oH5QHFT4Jg0eUEwFb8KTx7h96cVwrDge/view>
- Guía de Matemáticas. Colegio de Bachilleres Plantel 19 “Ecatepec”.
<https://sites.google.com/site/cb19portevi/mat>
- Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas III. Colegio de Bachilleres
https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_III.pdf

CORTE

3



Elementos de Trigonometría

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos

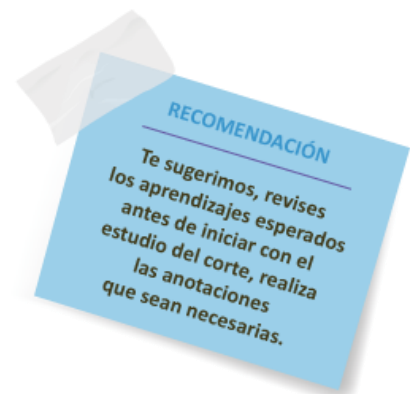
- Relaciones trigonométricas
- Círculo trigonométrico

Aprendizajes esperados.

- Interpreta y construye relaciones trigonométricas en el triángulo.
- Analiza al círculo trigonométrico y describe a las funciones angulares, realizan mediciones y comparaciones de relaciones espaciales.



Al finalizar este corte comprenderás las relaciones trigonométricas para aplicarlas en la solución y argumentación de problemas de tu contexto, además de fortalecer el razonamiento lógico matemático.



Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 2 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Clasificación de ángulos
- Clasificación de triángulos
- Nomenclatura de triángulos
- Sustitución de fórmulas
- Manejo de calculadora

Identifica lo que debes
saber para que la
comprensión de los
contenidos sea más fácil,
si descubres que has
olvidado algo ¡repásalo!



Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

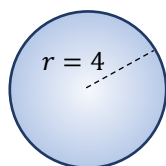
1. Relaciona el tipo de ángulo con las características que lo describen

	Tipo de ángulo	Características
I.	Agudo	a) Su medida es mayor a 90° y menor de 180°
II.	Obtuso	b) Mide más de 180° y menos de 360°
III.	Recto	c) Su medida esté entre 0° y 90°
IV.	Perígono	d) Mide exactamente 90°

2. Escribe las características de un triángulo rectángulo y dibuja un ejemplo.

3. ¿Cuál es la velocidad de un móvil si ha recorrido 5000 m en 2 horas?
Utiliza la expresión $v = \frac{d}{t}$, donde: v es velocidad, d, distancia en Km y t es tiempo en horas.

4. Determina el volumen de la siguiente esfera, utilizando la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



5. Con el uso de tu calculadora, determina el valor de las siguientes operaciones.

a) $x = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)}$

b) $-9 + [(-3)^2 - 8(-4)(2) + 5^2]$

c) $\text{sen}(40^\circ)$

d) $\tan(55^\circ)$

e) $\log(250)$

f) e^5



- [https://www.cecyl3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmaticas/AngulosClasificacion.html#:~:text=Clasificaci%C3%B3n%20de%20%C3%A1ngulos%20seg%C3%BAn%20su%20medida&text=1\)%20%C3%81ngulo%20agudo%3A%20es%20aquel,y%20menos%20de%20180%C2%B0.&text=5\)%20%C3%81ngulo%20completo%3A%20es%20aquel%20que%20mide%20360%C2%B0](https://www.cecyl3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmaticas/AngulosClasificacion.html#:~:text=Clasificaci%C3%B3n%20de%20%C3%A1ngulos%20seg%C3%BAn%20su%20medida&text=1)%20%C3%81ngulo%20agudo%3A%20es%20aquel,y%20menos%20de%20180%C2%B0.&text=5)%20%C3%81ngulo%20completo%3A%20es%20aquel%20que%20mide%20360%C2%B0).
- <https://www.geogebra.org/m/rwgexkpb>
- <https://youtu.be/Kf6nTDaIFnU>

A continuación, encontrarás información relevante sobre los aprendizajes esperados planteados para este Corte.

Relaciones trigonométricas en el triángulo

La trigonometría es el estudio y medición de los triángulos, sus lados y ángulos, por sus raíces griegas, trigonometría se puede definir como “medida de triángulos”.

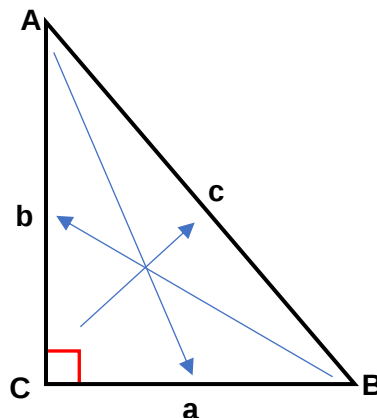
Una de las herramientas de la trigonometría son las razones o relaciones trigonométricas, que obtienen su nombre porque relacionan los lados de un triángulo rectángulo a través de una razón para obtener la medida de sus ángulos agudos. Las razones trigonométricas son seis, pero las más comunes son: seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan), las otras tres son llamadas inversas, y son las recíprocas de las primeras: secante (sec), cosecante (csc) y cotangente (cot).

Antes de iniciar a plantear las relaciones trigonométricas, se presenta la manera como usualmente se nombran los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Se utilizan letras mayúsculas para nombrar cada vértice de un triángulo, por lo tanto, también los ángulos reciben ese mismo nombre. Las letras más utilizadas son: A, B y C. Reservando a C para el vértice del ángulo recto.

Los lados se nombran de la misma manera que su vértice opuesto, pero con minúscula.

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el recto se llaman catetos, y el lado opuesto se llama hipotenusa, además este lado siempre es el más grande.



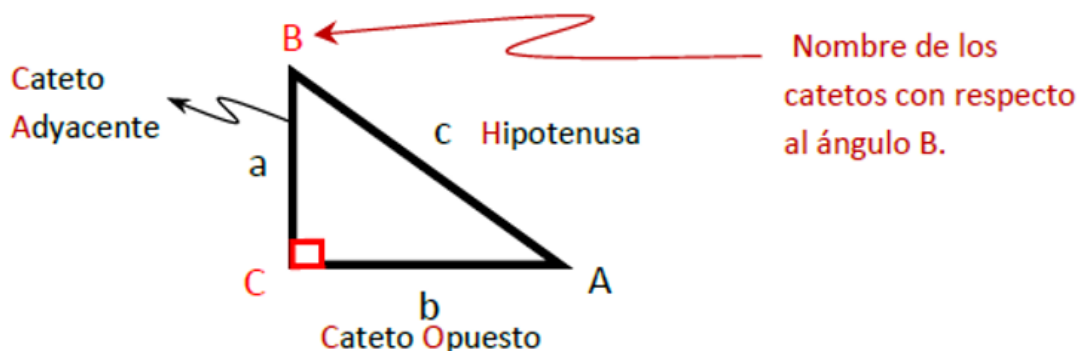
Las relaciones trigonométricas, tienen las siguientes expresiones:

$$\text{Seno: } \sin \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno: } \cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente: } \tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Para poder utilizar estas expresiones, se tienen que plantear considerando a uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y nombrar a los lados. A continuación, se muestra un ejemplo, considerando como referencia al ángulo A.

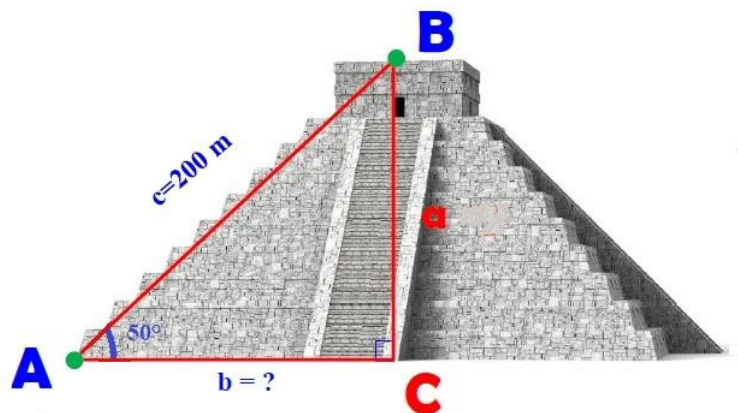


Razones Trigonómicas considerando el ángulo B.

Las razones trigonométricas se aplican únicamente en triángulos rectángulos para calcular la medida de sus lados o la medida de sus ángulos.

Directas	Inversas
$\text{seno } B = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CO}{H} = \frac{b}{c}$	$\text{cosecante } B = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{H}{CO} = \frac{c}{b}$
$\text{coseno } B = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CA}{H} = \frac{a}{c}$	$\text{secante } B = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{H}{CA} = \frac{c}{a}$
$\text{tangente } B = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b}$	$\text{cotangente } B = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{CA}{CO} = \frac{b}{a}$

Imagina que vas de visita a la pirámide de Kukulcán en el sitio arqueológico de Chichén Itzá, al mirarla te sorprende lo alta que es y te preguntas cuánto medirá, ¿cómo se podrá determinar su altura?



Con base en los datos que se tienen, se define cuál será la o las relaciones trigonométricas que se pueden utilizar para determinar la altura de la pirámide.

- Como se conoce la medida del ángulo A y de la hipotenusa. Conviene determinar las relaciones con base en este ángulo, por lo cual, la altura, representada por el lado a , es el cateto opuesto a dicho ángulo. ¿Cuál de las razones trigonométricas directas relaciona estos tres elementos, ángulo A, hipotenusa y cateto opuesto?

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- Primero se determina la razón trigonométrica, posteriormente se sustituyen los nombres de los elementos en el ejemplo en particular

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

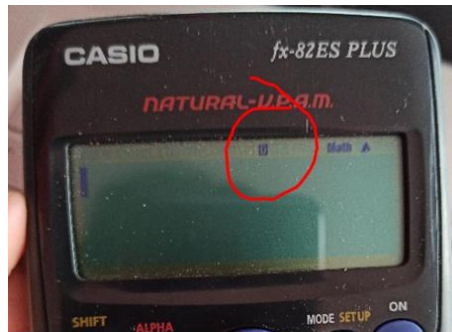
- El siguiente paso es sustituir los valores que se conocen.

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{a}{200}$$

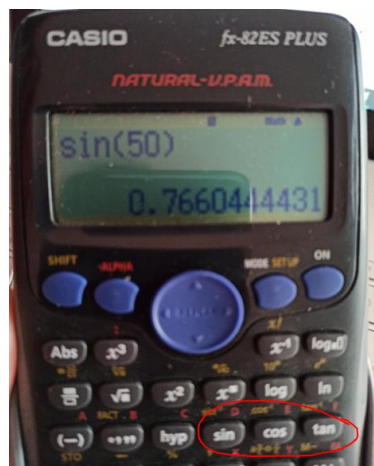
- A partir de esta expresión se despeja el valor que se quiere conocer.

$$a = 200 \cdot \text{sen } 50^\circ$$

- Es necesario determinar el valor de $\text{sen}(50^\circ)$, para lo cual vas a necesitar utilizar una calculadora científica, y revisar que se encuentre programada en grados.



La manera en que ingresas los valores a la calculadora depende del modelo que tengas y cómo este diseñada. Es recomendable que primero identifiques los botones que tienen las funciones, seno, coseno y tangente.



$$\text{sen } 50^\circ = 0.7660$$

- Retomando el valor de $\text{sen } 50^\circ$, se sustituye en la expresión despejada.

$$a = 200 \cdot \text{sen } 50^\circ$$

$$a = 200(0.7660)$$

$$a = 153.2 \text{ m}$$

Con los datos que se tienen puedes determinar la distancia de la esquina de la pirámide a las escalinatas, en la imagen se identifica con la letra b . ¿Cuál relación trigonométrica directa utilizarías?

Para ayudarte, primero identifica con cuáles datos cuentas, cuál es la incógnita y cuál razón trigonométrica los relaciona a todos.



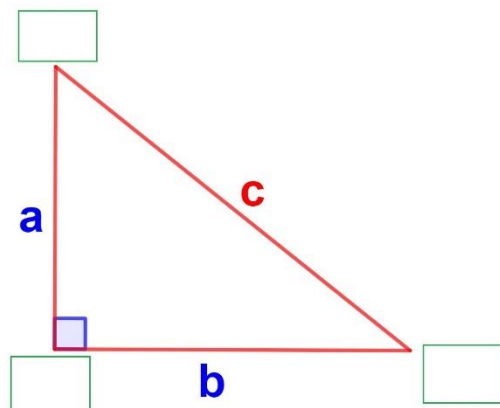
<https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles#intro-to-the-trig-ratios>

<https://matematicasmodernas.com/circulo-trigonometrico-y-funciones-trigonometricas/>

<https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions/alg-unit-circle-definition-of-trig-functions/v/matching-ratios-trig-functions>

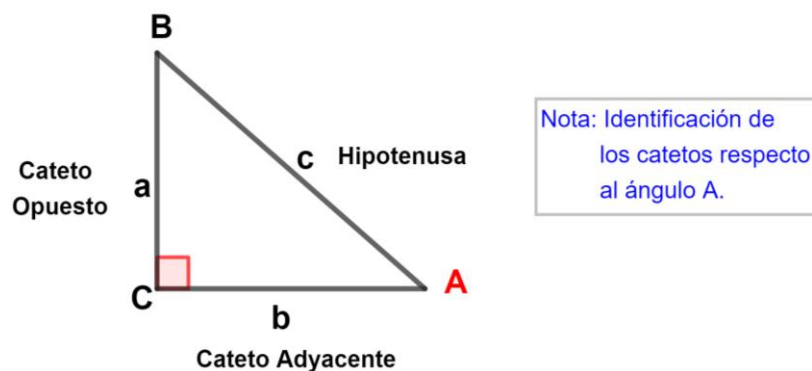
Actividad de aprendizaje 1

En el siguiente triángulo rectángulo, coloca los nombres de los ángulos (vértices) de acuerdo con los nombres de los lados.



Actividad de aprendizaje 2

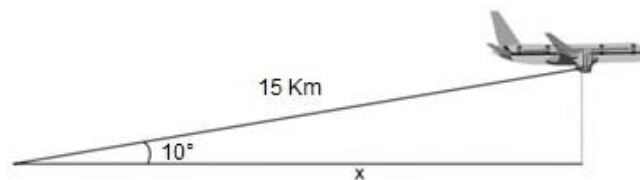
Con base en los datos de la figura, completa la información del siguiente cuadro:



Directas	Inversas
$\text{sen}A = \frac{CO}{H} = \frac{a}{c}$	$\text{csc}A = \frac{H}{CO} = \frac{c}{a}$
$\text{cos}A = \frac{CA}{H} = \frac{b}{c}$	$\text{sec}A = \frac{H}{CA} = \frac{c}{b}$
$\text{tan}A = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b}$	$\text{cot}A = \frac{CA}{CO} = \frac{b}{a}$

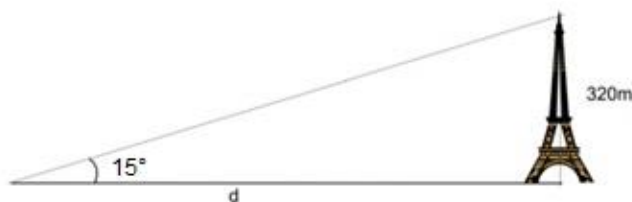
Actividad de aprendizaje 3

- a) Un avión despegue con un ángulo de elevación de 10° . Determina la distancia x que recorre después de volar 15 Km. ²¹



²¹ Modificado de Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas III. Colegio de Bachilleres.

- b) La torre Eiffel tiene una altura de 320m como se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia a la que debe colocarse una persona si desea observar la torre con un ángulo de elevación de 15° ?²²



- c) ¿Qué ángulo forma el piso con el base de una escalera de 10 m de largo, si la distancia que tiene hacia el muro es de 3 m?²³

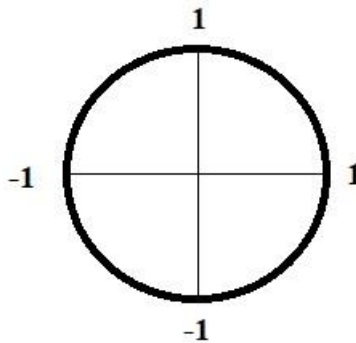
²² Íbidem

²³ Modificado de Guía de estudio Matemáticas II Guía para círculo de estudio, grupo de estudio y examen directo. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 7 "Iztapalapa"

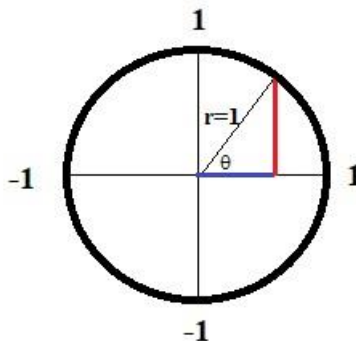
- d) Desde lo alto de la azotea de un edificio de 60 m de altura se observa un rosal en una jardinera con un ángulo de depresión de 23° , calcula la distancia del edificio a la jardinera.

Círculo trigonométrico

El círculo trigonométrico, es un círculo unitario, es decir, que su radio tiene como medida la unidad y su centro se ubica en el origen del plano cartesiano. Se utiliza como herramienta para tener un fundamento teórico de las funciones trigonométricas.



Además, con ayuda del círculo trigonométrico se pueden determinar el valor aproximado de las razones trigonométricas para valores determinados de ángulos. Por ejemplo:



Imagina que dibujas un triángulo rectángulo con vértice en el centro del círculo unitario, como se muestra en la figura anterior. Si se quisiera obtener la función seno y coseno del ángulo q , se pueden aplicar las razones trigonométricas.

$$\text{sen } q = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

De la figura se conoce que la hipotenusa de este triángulo mide uno, por lo cual, el valor del $\text{sen } q$, coincide con el valor del cateto opuesto (resaltado con rojo en la figura).

$$\text{sen } q = \frac{\text{cateto opuesto}}{1}$$
$$\text{sen } q = \text{cateto opuesto}$$

Un análisis similar se realiza para el valor del $\cos q$,

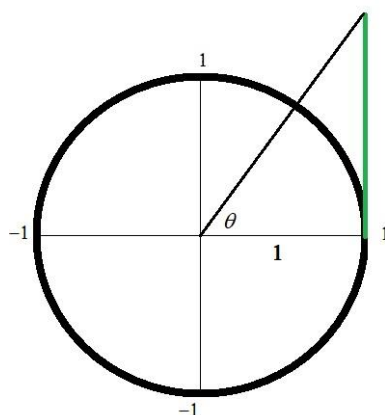
$$\cos q = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Como la hipotenusa del triángulo tiene valor uno.

$$\cos q = \frac{\text{cateto adyacente}}{1}$$

$$\cos q = \text{cateto adyacente}$$

Para utilizar el círculo unitario en el análisis de la función tangente del ángulo, es necesario hacer otra construcción.



Recuerda la relación trigonométrica para tangente de un ángulo.

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

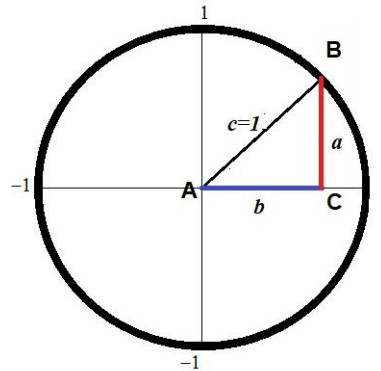
Del círculo trigonométrico se sabe que el cateto adyacente tiene valor de uno, porque está construido sobre el radio del círculo. Sustituyendo este valor, la expresión queda:

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{1}$$

$$\tan \theta = \text{cateto opuesto}$$

Por lo anterior, se puede decir que el valor de $\tan \theta$, coincide con el valor del cateto opuesto, resaltado en verde en la figura.

Si se analizan las funciones anteriores para un ángulo de 45° :



Como el ángulo A de este triángulo rectángulo vale 45° , el ángulo B también tiene ese valor, ya que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo debe ser 180° . Entonces, además de ser un triángulo rectángulo es un triángulo isósceles, porque tiene dos ángulos iguales, y dos lados iguales, en este caso los catetos.

Cuando se aplica el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como a y b valen lo mismo y $c=1$:

$$2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Cateto opuesto: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Cateto adyacente: $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sustituyendo en las expresiones obtenidas para seno y coseno en el círculo unitario.

$$\begin{aligned} \text{sen } A &= \text{cateto opuesto} \\ \text{sen } 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

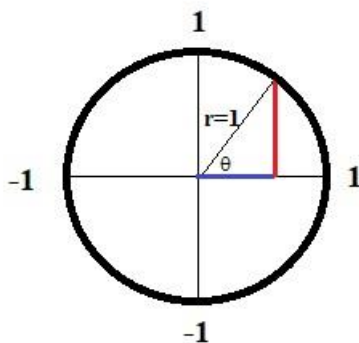
$$\begin{aligned} \text{cos } A &= \text{cateto adyacente} \\ \text{cos } 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



- <https://www.cecyl3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmaticas/Ct.htm>
- <https://www.todamateria.com/funciones-trigonometricas/>
- <https://maticasmodernas.com/circulo-trigonometrico-y-funciones-trigonometricas/>
- <https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions/alg-unit-circle-definition-of-trig-functions/v/unit-circle-definition-of-trig-functions-1>

Actividad de aprendizaje 4

Explica con base en el círculo unitario los valores de seno y coseno de 60° .



Actividad de aprendizaje 5

Con base en el uso del círculo unitario, completa el siguiente cuadro.

Medida de ángulo θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$
0°			
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
60°			

En este apartado puedes valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte 3.

Aspecto para considerar	Si	No	Cómo puedo realizarlo mejor
Organicé el tiempo de estudio para la realización de esta guía.			
Realicé una lectura activa de los ejemplos de la guía.			
Procuré eliminar las distracciones para realizar las actividades.			
Realicé anotaciones a lo largo del desarrollo de la guía.			
Consulté las fuentes sugeridas para los temas que representaron mayor dificultad.			
Desarrollé detalladamente las actividades de aprendizaje sugeridas.			
En caso necesario, busqué y realicé más ejercicios para reforzar mi aprendizaje.			

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

- Baldor, A. (2004). Geometría plana y del espacio y trigonometría. Vigésima reimpresión México: Publicaciones Cultural
- Clemens, E. (2004). Geometría. México: Pearson
- Filloy, E., Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- Guía de Estudio para Examen de Evaluación de Recuperación Plan 2018. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 2 “Cien metros”.
<https://guiasbach2.webcindario.com/pagina8.html>
- Guía de estudio Matemáticas II Guía para círculo de estudio, grupo de estudio y examen directo. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 7 “Iztapalapa”
<https://drive.google.com/file/d/16pMCqFYjCHXsGe0HbDZ56DzIfwwlmEBg/view>
- Guía de estudio para presentar el examen extraordinario. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 8 “Cuajimalpa”
<https://drive.google.com/file/d/1oH5QHFT4Jg0eUEwFb8KTx7h96cVwrDqe/view>
- Guía de Matemáticas. Colegio de Bachilleres Plantel 19 “Ecatepec”.
<https://sites.google.com/site/cb19portevi/mat>
- Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas III. Colegio de Bachilleres.
https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_III.pdf

Las siguientes actividades te permiten integrar todo lo aprendido con esta guía y propician un dominio general de las habilidades que ejercitaste.

Instrucción. Responde correctamente las siguientes actividades, en los casos que requieran procedimiento escríbelo detalladamente y argumenta tus respuestas.

1. En la siguiente imagen, se muestran los husos horarios de Nueva York, Londres, París, Berlín y Tokio, escriba la hora marcada en cada uno de ellos, e indique el tipo de ángulo comprendido entre las manecillas del reloj, su valor aproximado:



24

CIUDAD	HORA	MEDIDA DEL ÁNGULO	TIPO DE ÁNGULO
New York			
Londres			
Paris			
Berlín			
Tokio			

²⁴ https://www.viaje.jp/consejos/consejo-para-viajar-a-japon/diferencia_horaria.html

2. Con el apoyo del círculo unitario que construiste, realiza las siguientes conversiones de unidad de medida de ángulos; de ser necesario, utiliza las equivalencias que se utilizaron en este tema.

I) Determina el valor en radianes de los siguientes ángulos indicados en grados.

a) 75°

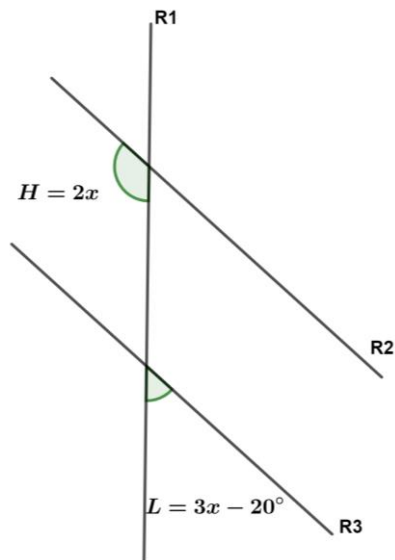
b) 120°

II) Determina el valor en grados de los siguientes ángulos indicados en radianes

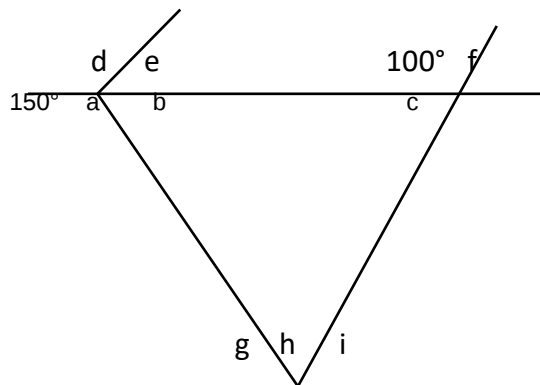
c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{6\pi}{10}$

3. La recta R1 es paralela a la recta R2, la recta R3 es una recta secante a R1 y R2. Determina el valor de los ángulos H y L



4. En la siguiente figura, se observan sólo el valor de dos ángulos, determine el valor de los ángulos restantes, e indique que ángulos son (ángulos entre dos rectas paralelas y cortados por una transversal):



5. Determina el área de en metros cuadrados de la madera que se necesita para construir la siguiente casa:



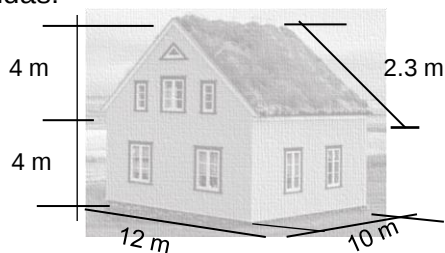
25

Considera:

Determina el área, sin descontar los espacios de puertas y ventanas.

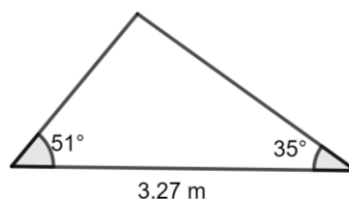
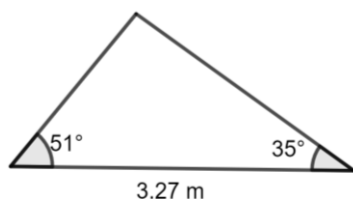
Recuerda dividir por figuras geométricas para obtener el área total.

Medidas:



6. Observa que, los siguientes pares de triángulos son congruentes. Analiza la información que se te proporciona en cada caso y escribe el criterio de congruencia que justifique la relación.²⁶

a)

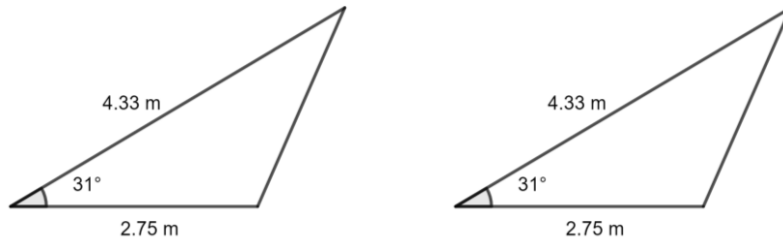


Criterio: _____

b)

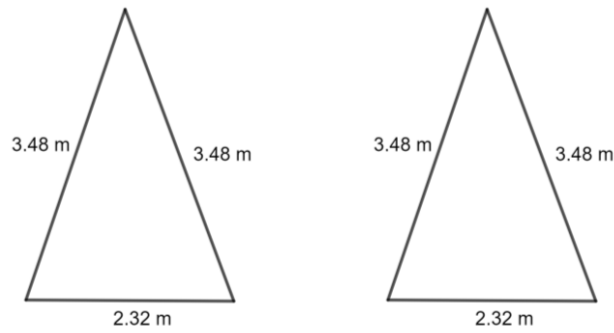
²⁵ <https://pixabay.com/es/>

²⁶ Tomado de Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas III. Colegio de Bachilleres.



Criterio: _____

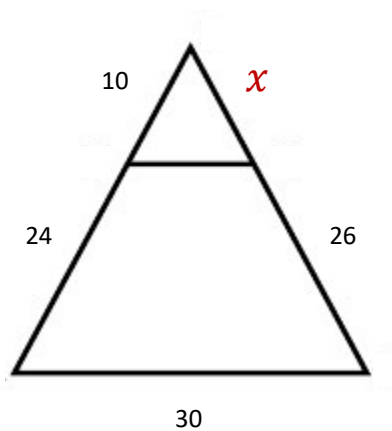
c)



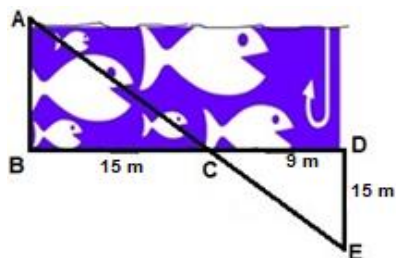
Criterio: _____

7. Determina el valor del segmento identificado como x , y posteriormente determina el perímetro del triángulo mayor.

Sugerencia. Asigna nombre a los vértices de cada triángulo.



8. Utilizando el Teorema de Tales, determina el ancho del río (segmento AB).²⁷

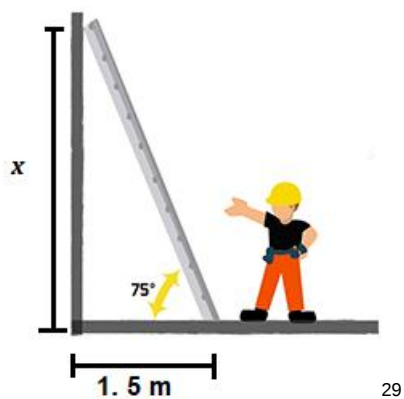


9. Se desea construir una rampa que el largo de su superficie mida 20 m de largo que se levante a una altura de 7 m ¿qué ángulo formará con el piso?²⁸

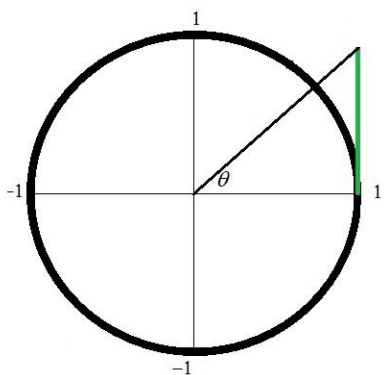
²⁷ Modificado de Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas III. Colegio de Bachilleres.

²⁸ Modificado de Guía de estudio Matemáticas II Guía para círculo de estudio, grupo de estudio y examen directo. Matemáticas II. Colegio de Bachilleres Plantel 7 "Iztapalapa"

10. La base de una escalera se recarga a una distancia de 1.5 m de una pared. Si la escalera forma un ángulo con el suelo de 75° ¿cuál es la altura que alcanza la escalera sobre la pared?



11. Utilizando el círculo unitario determina el valor del coseno de 45° .



²⁹ <http://todoferreteria.com.mx/el-angulo-correcto-de-la-escalera-extensible/>

PLAN 2014

ACTUALIZADO



Somos Lobos Grises,
somos Bachilleres