COLEGIO DE BACHILLERES

[Guía de estudio]

Quinto
SEMESTRE

MatemáticasV

PLAN 2014
ACTUALIZADO

https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx

PLAN 2014
ACTUALIZADO

CRÉDITOS

Autores:
Prof. Julio César Ortega López
Profa. Ma. Lucía Castellanos Lozada

Actualización
Prof. Miguel N. Medina Delgado

Coordinadora:
Aimé García

PRESENTACIÓN

Con la finalidad de acompañar el trabajo con el plan y programas de estudio vigentes, además de brindar un recurso didáctico que apoye al cuerpo docente y al estudiantado en el desarrollo de los aprendizajes esperados; el Colegio de Bachilleres desarrolló, a través de la Dirección de Planeación Académica y en colaboración con el personal docente de los veinte planteles, las guías de estudio correspondientes a las tres áreas de formación: básica, específica y laboral.

Las guías pretenden ser un apoyo para que las y los estudiantes trabajen de manera autónoma con los contenidos esenciales de las asignaturas y con las actividades que les ayudarán al logro de los aprendizajes; el rol del cuerpo docente como mediador y agente activo en el aprendizaje del estudiantado no pierde fuerza, por el contrario, se vuelve fundamental para el logro de las intenciones educativas de este material.

Las guías de estudio también son un insumo para que las y los docentes lo aprovechen como material de referencia, de apoyo para el desarrollo de sus sesiones; o bien como un recurso para la evaluación; de manera que, serán ellos, quienes a partir de su experiencia definirán el mejor uso posible y lo adaptarán a las necesidades de sus grupos.

El Colegio de Bachilleres reconoce el trabajo realizado por el personal participante en la elaboración y revisión de la presente guía y agradece su compromiso, entrega y dedicación, los cuales se reflejan en el servicio educativo pertinente y de calidad que se brinda a más de 90,000 estudiantes.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de las Matemáticas te brinda las herramientas para interpretar el entorno a través de la cuantificación, medición y descripción por medio de ecuaciones y funciones. Una vez que se entiende un concepto matemático, el entorno se mirará de manera diferente. Las aplicaciones matemáticas se pueden observar en cada aspecto de la vida diaria, en la cuenta de las compras, en la construcción de un edificio, en los registros de las calificaciones de los estudiantes, en la evolución de una enfermedad, entre otros.

La asignatura Matemáticas V tiene como propósito que seas capaz de identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación de la acumulación del cambio y acumulación con fines predictivos y de modelación. Para lo cual se especifican el desarrollo en la asignatura de las competencias genéricas y disciplinares y profesionales básicas.

Este material constituye un apoyo para el momento de contingencia que se está viviendo actualmente y tiene la intención de contribuir a que logres adquirir los aprendizajes comprendidos en la asignatura de Matemáticas V.

Es recomendable que al momento de estudiar atiendas las siguientes recomendaciones:

- Reduce o elimina las distracciones
- Dedica un tiempo exclusivo para el estudio
- Designa un espacio particular para tu estudio
- Organiza cuáles serán los temas que vas a estudiar
- Realiza anotaciones y sigue los procedimientos de manera activa, es decir, reprodúcelos y compruébalos por tu cuenta
- Anexa hojas si lo consideras necesario
- Ten a la mano una calculadora científica y explórala con el fin de conocer su funcionamiento
- Si se te presentan dudas, repasa el contenido o consulta el material recomendado en la sección Conoce +

ÍNDICE

CORTE

1

Área bajo la curva

Aprendizajes esperados:

- Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o se calcula el área de estos y se estima el valor del área bajo la curva.
- Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.

PROPÓSITO

Que el estudiante determine el área bajo la curva de funciones algebraicas y trascendentes en diferentes contextos.

RECOMENDACIÓN

Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 1 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Leyes de los exponentes
- Elementos de términos algebraicos: coeficiente, base y exponente.
- Suma y resta de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- División de polinomios
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Concepto de función
- Evaluación de funciones

Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

Evaluación diagnostica

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(6x^2 - 5x + 2) + (-3x^2 + 4x - 1) =$

b) $(3x^3 + 4x - 3) - (5x^3 - 2x^2 + x + 1) =$

c) $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + 3) + (5x^5 - 6x + 2) - (x^4 - 2x^3 + 3x - 5 + 8x^2) =$

d) $\frac{8x^6}{-2x^2} =$

e) $\frac{\frac{1}{4}a^5b^3c^2}{-4a^3b^2c} =$

f) $\frac{-45m^8}{-\frac{3}{5}m^3} =$

2.- Encuentra el resultado de las siguientes expresiones:

a) $(a^9)(a^5)(a^{-4}) =$

b) $(-4x)^{-2} =$

c) $\frac{-54m^7}{-9m^4} =$

d) $(2a^2b^4)(3ab^3)^2=$

3.- Evalúa las siguientes funciones.

a) Si $f(x) = 4x^2 - 3$; obtén $f\left(\frac{1}{4}\right), f(5), f(-1)$

b) Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$; obtén $f(4), f(-2), f(0), f(-1)$

c) Si $f(x) = \frac{4x-2}{4x+2}$; obtén $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{4}\right)$

d) Si $f(x) = 4$; obtén $f(6), f\left(\frac{2}{3}\right), f(-2)$

4. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$; en el intervalo $[-4, 2]$

b) $f(x) = x^2 + 1$; en el intervalo $[-3, 4]$

CONOCE +

https://youtu.be/Yng9FbUK2MY
https://youtu.be/cWIMQGvy9fg
https://youtu.be/0fPKPiRcnqE
https://youtu.be/tvUoOZDRAks

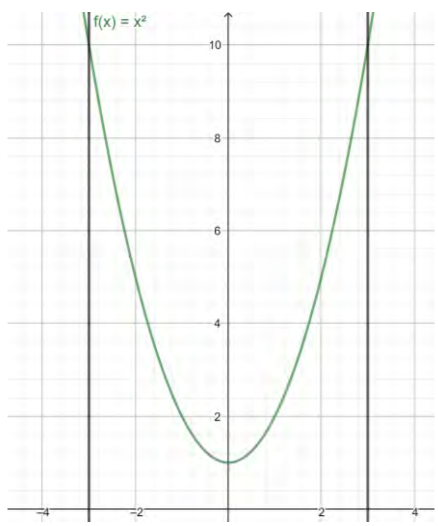
A partir del descubrimiento del cálculo, la historia de las matemáticas no fue igual, ya que el cálculo concentra conceptos y métodos que los matemáticos trataron de dominar por aproximadamente veinte siglos. Los métodos infinitesimales se pudieron concretar hasta el siglo XVII y fueron Newton y Leibnitz los inventores del cálculo como se conoce actualmente.

Área bajo la curva

Se conocen muchas fórmulas para determinar el área de diferentes figuras geométricas. Por ejemplo, para el cálculo del área de un triángulo con base b y altura a, se usa la fórmula:

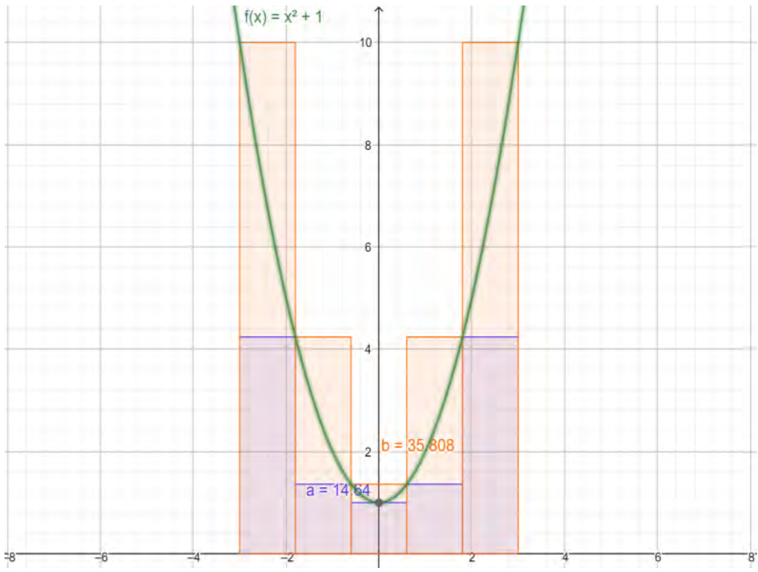
$$A = \frac{b*a}{2}$$

Sin embargo, no existe una fórmula para calcular el área que hay entre la parábola $y = x^2 + 1$, el eje$x$ y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$.



El valor de esta área se puede aproximar al seccionar el intervalo -3,3 y dibujar rectángulos con altura igual a la ordenada $y_i = x_i^2$. Para esto se tienen dos opciones, dibujar los rectángulos de manera que una parte de este quede por encima de la parábola, o bien los dibujarlos de manera que una parte quede por debajo de la parábola.

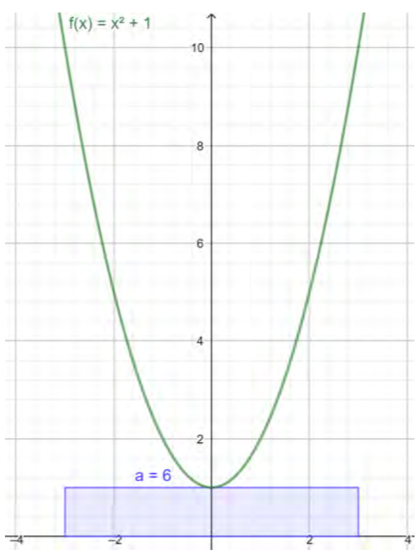
Dependiendo de la aproximación que se haga tendrá, en el primer caso un error por exceso, es decir, el área calculada será mayor al valor del área que buscamos. En el segundo caso el área aproximada será un poco menor al área debajo de la parábola.

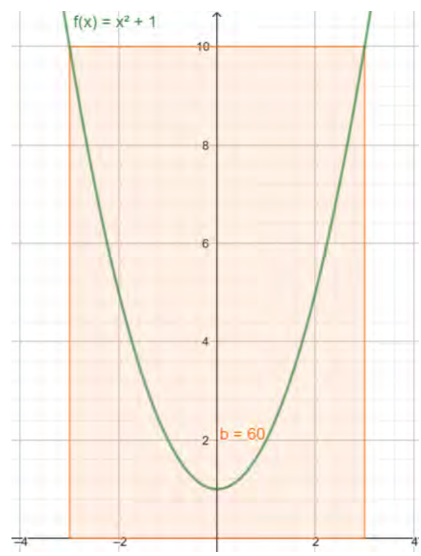


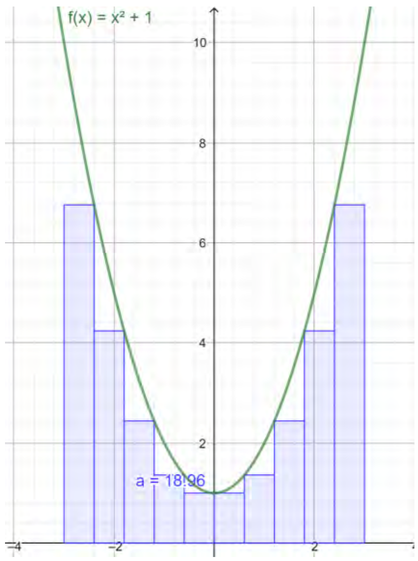
Si se utilizan cinco rectángulos superiores y cinco rectángulos inferiores, se tiene lo siguiente:

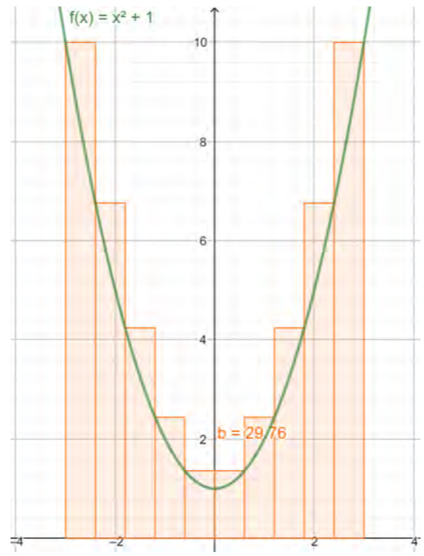
- Para los rectángulos superiores el Valor del área es 35.808 u^2
- Para los rectángulos inferiores el valor del área es 14.64 u^2

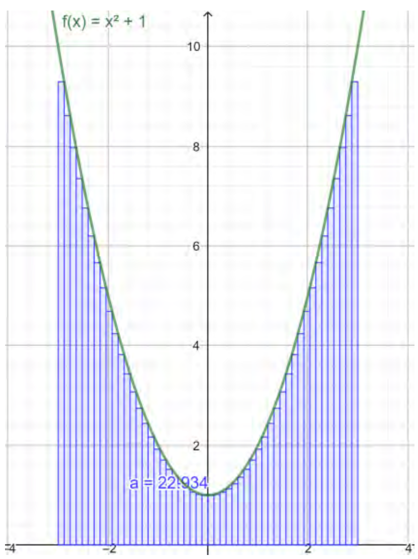
El tamaño del error dependerá de la cantidad de rectángulos que se dibujen para hacer la aproximación. A mayor cantidad de rectángulos, las regiones que queden por encima o por debajo serán cada vez más pequeños, como se muestran en las siguientes gráficas, tanto que la suma de los errores será despreciable:

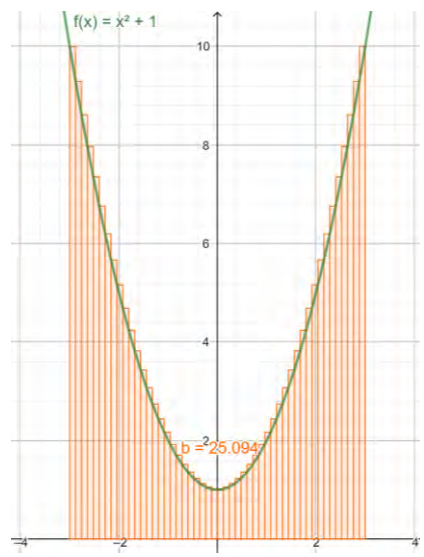








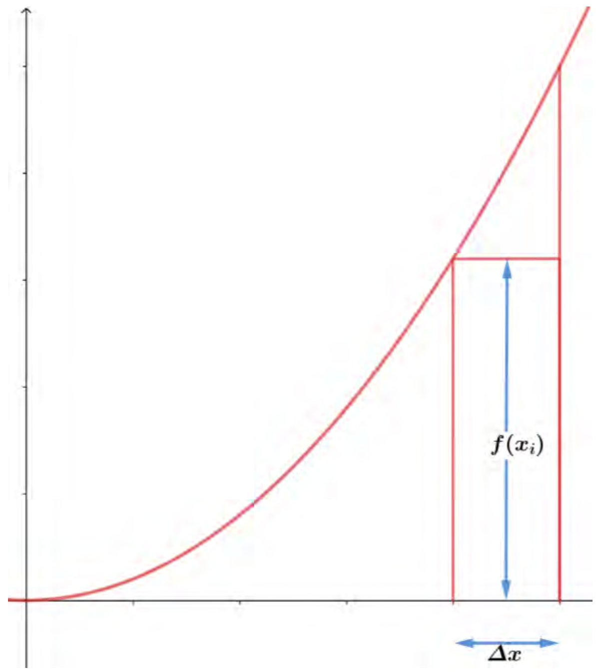




Como se puede apreciar, si se dibujan más rectángulos se obtiene una mejor aproximación. Entonces, si se encuentra el límite de la suma de las áreas de todos los rectángulos que dibujamos bajo la curva cuando el número de rectángulos tiende a infinito, debemos obtener el área bajo la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Es decir:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

representa el área que buscamos. Observa que la base del rectángulo mide $x = \frac{b-a}{n}$ porque es el tamaño del intervalo dividido entre n, que es la cantidad de particiones consideradas en el intervalo, todas del mismo tamaño. La altura del rectángulo puede ser calculada utilizando la función: $f(x_i)$.



Cuando el número de particiones (n) crece, el error que se comete al aproximar el área bajo la curva con el área del rectángulo cada vez es más pequeño y cuando n tiende a infinito, x tiende a cero. Debido a esto decimos que el área bajo la curva es:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

Diferencial de área

Si se consideran un par rectángulos con base común que se usan para aproximar el área bajo la curva, se observa que la base es Δx, la altura del rectángulo de mayor área es $f(x_i + \Delta x_i)$ y la altura del otro es $f(x_i)$.

El área bajo la curva es mayor que el área del rectángulo que queda por debajo de la curva y a su vez menor que el área del rectángulo que queda por encima. Algebraicamente:

$$(\Delta x) * f(x) \leq \Delta A \leq (\Delta x) * f(x + \Delta x)$$

Al dividir la desigualdad entre Δx, se obtiene:

$$f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

Si se hace que Δx tienda a cero, se obtiene que la derivada de la función que calcula el área debajo de la función $y = f(x)$ es igual a $f(x)$:

$$f(x) \leq \frac{dA}{} \leq f(x) \to \frac{dA}{} = f(x)$$

En palabras, si se quiere calcular el área debajo de la curva de una función dada, se tiene que integrarla, dado que la operación inversa de derivar es integrar.

Y esta integral está definida por el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)$$

que incluye información acerca de los límites de integración, es decir, en qué intervalo se quiere calcular el área bajo la curva, por eso se llama integral definida.

De hecho, el símbolo de integración $\int$ representa una "S" *estirada y estilizada*, para representar la suma de las áreas de los rectángulos que se dibujan (mentalmente) cuando se hace que n tienda a infinito.

Teorema fundamental del cálculo

Si crees que calcular áreas que se localizan bajo las curvas es un proceso tedioso debido a la utilización de rectángulos, existe un método más sencillo para hacerlo.

El teorema fundamental del cálculo aclara la relación entre las derivadas y las integrales. La integral es la operación inversa de la derivación.

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(x)$ es una antiderivada de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Se puede utilizar la relación entre diferenciación e integración descrita en el teorema fundamental del cálculo para calcular integrales definidas de manera más rápida y sencilla.

Cada regla de derivación da lugar a una regla correspondiente de integración. Así para cualquier potencia racional

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^4$, en el intervalo de [-2, 3], se tiene:

Se establecen los límites de integración y se aplica la regla de integración:

$$\int_{-2}^{3} x^4\,dx = \left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_{-2}^{3}$$

Se simplifica la expresión:

$$\int_{-2}^{3} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{3}$$

Se evalúa la función en ambos límites de integración y se realizan las operaciones aritméticas para determinar el valor del área bajo la curva.

$$\int_{-2}^{3} x^4\,dx = \left[\frac{\mathbf{3^5}}{\mathbf{5}}\right] - \left[\frac{\mathbf{-2^5}}{\mathbf{5}}\right] = \left[\frac{\mathbf{243}}{\mathbf{5}}\right] - \left[\frac{\mathbf{-32}}{\mathbf{5}}\right] = \frac{243}{5} + \frac{32}{5} = \frac{275}{5} = 55\ u^2$$

Ejemplos:

1.- Calcular el área limitada por $f(x) = 6$ y el eje "x" en el intervalo $[-1, 3]$ y grafica.

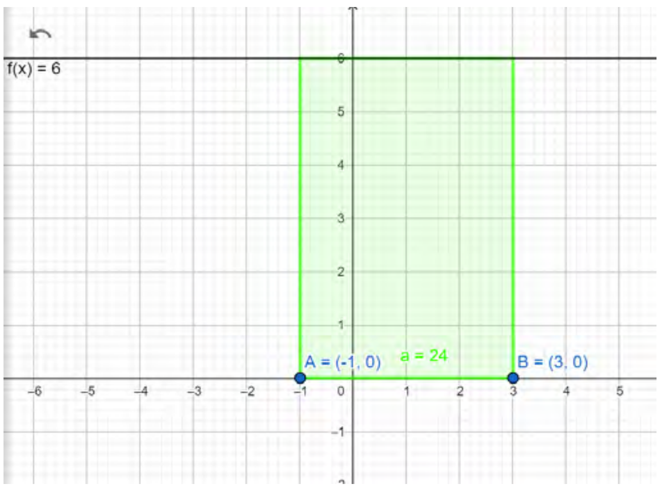


Tabla de valores.

x	f(x)
-2	6
-1	6
0	6
1	6
2	6

$$\acute{A}\boldsymbol{rea} = \int_{-1}^{3} \boldsymbol{6\,dx} = \boldsymbol{6}\int_{-1}^{3} \boldsymbol{dx} = [6x]_{-1}^{3} = 6(3) - 6(-1) = 18 + 6 = \boldsymbol{24\,u^2}$$

2.- Determinar el área limitada por la curva $x2 + 3$ y el eje "x" en el intervalo $[-2,2]$.

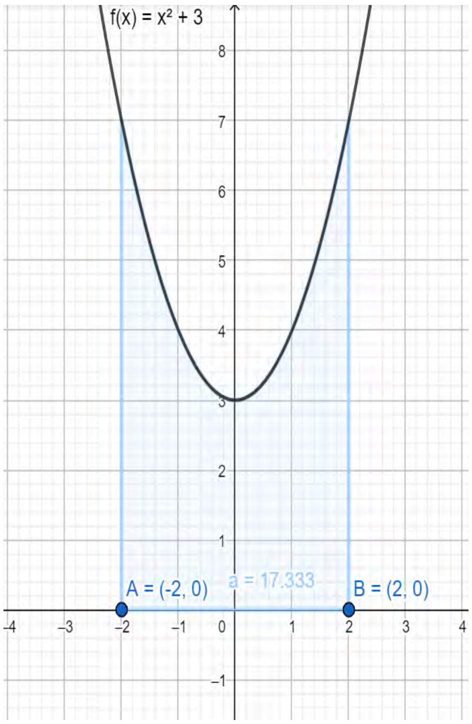


Tabla de valores.

x	f(x)
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7

$$\acute{A}rea = \int_{-2}^{2} x^2 + 3\,dx = \int_{-2}^{2} x^2\,dx + 3\int_{-2}^{2} dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} + 3(2)\right] - \left[\frac{-2^3}{3} + 3(-2)\right]$$

$$= \left[\frac{8}{3} + 6\right] - \left[\frac{-8}{3} - 6\right] = \frac{26}{3} + \frac{26}{3} = \frac{52}{3} = 17.333u^2$$

3.- Hallar el área comprendida entre la función $f(x) = 10 - x$ y el eje "x" en el intervalo $[-3,0]$

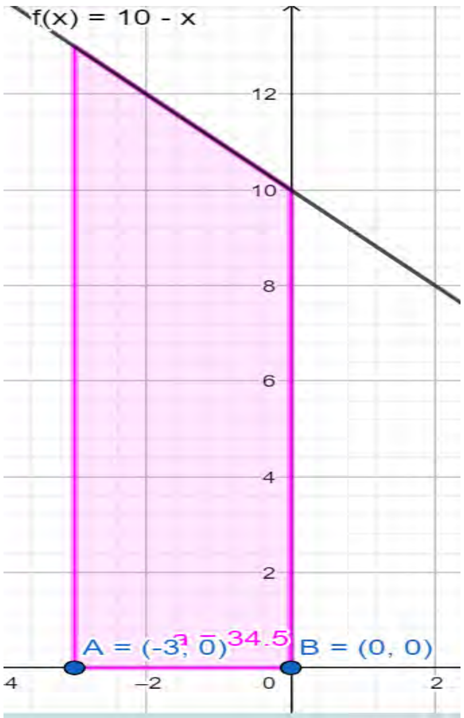


Tabla de valores

x	f(x)
-3	13
-2	12
-1	11
0	10
1	9
2	8
3	7

$$\text{Área} = \int_{-3}^{0} 10 - x\,dx = 10\int_{-3}^{0} dx - \int_{-3}^{0} x\,dx = \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left[10\,(0) - \frac{0^2}{2}\right] - \left[10\,(-3) - \frac{-3^2}{2}\right] = [0 - 0] - \left[-30 - \frac{9}{2}\right] = 0 + \frac{69}{2} = 34.5\ \text{u}^2$$

https://youtu.be/xihhyyHYw7M
https://youtu.be/5ZrfmQEVMjk

4.- Encuentra el área limitada por la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, en el intervalo [0,4], grafica.

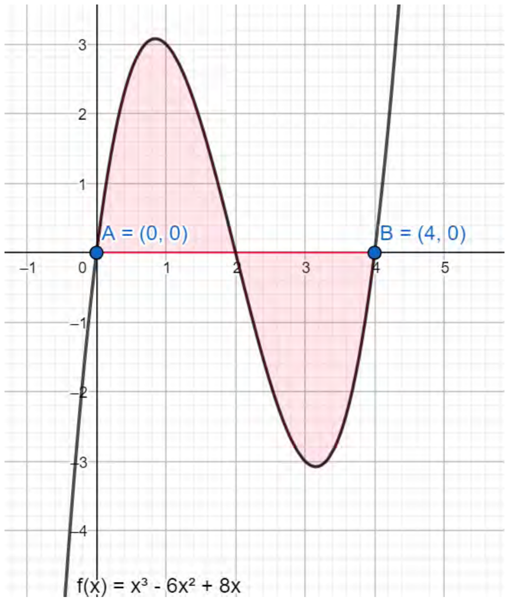


Tabla de valores.

x	f(x)
0	0
1	3
2	0
3	-3
4	0
5	15

En la gráfica se observa que el área esta dividida en dos secciones A_1 y A_2, en este caso se debe dividirel intervalo en dos secciones. Primero el intervalo de 0 a 2 que representa el área sobre el eje "x" y despés el intervalo de 2 a 4 que representa el área bajo el eje "x".

Área 1 = $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \int_0^2 x^3\, dx - 6\int_0^2 x^2\, dx + 8\int_0^2 x\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2$

$= \left[\frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 4(2)^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2(0)^3 + 4(0)^2\right] = [4 - 16 + 16] - [0 - 0 + 0] = 4 - 0 =$ **4u²**

Área 2 = $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \int_2^4 x^3\, dx - 6\int_2^4 x^2\, dx + 8\int_2^4 x\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$

$= \left[\frac{4^4}{4} - 2(4)^3 + 4(4)^2\right] - \left[\frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 4(2)^2\right] = [64 - 128 + 64] - [4 - 16 + 16]$

=0-4= |-4|= 4u² **Como la segunda área es negativa y no podemos tener un área negativa se toma el valor absoluto.**

Área total = 4 +4 = 8u²

Actividad de aprendizaje

Encuentra el área limitada por las siguientes curvas y el eje "x" en los intervalos indicados.

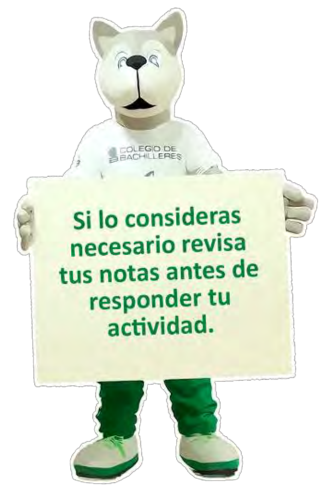
a) $f(x) = x^2 - 4x$ en el intervalo $[-1, 4]$

b) $f(x) = 4 - 2x$ en el intervalo $[0, 5]$

c) $f(x) = 2x^2 + x^3$ en el intervalo $[-3, 1]$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $[-1, 3]$

e) $f(x) = x^3 - x + 1$ en el intervalo $[-0.5, 2]$


Si lo consideras
necesario revisa
tus notas antes de
responder tu
actividad.

En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte.

Autoevaluación[1]

Instrucciones: lee cuidadosamente cada uno de los siguientes enunciados y marca con una X la celda que describa mejor tu desempeño durante este corte de aprendizaje, anota tus observaciones y comentarios.

Indicador			
DESEMPEÑO	**SI**	**NO**	**Observaciones y/o comentarios**
Terminé todas las actividades de este corte			
Realicé las actividades en orden			
Reforcé conceptos con las propuestas de la sección Conoce +			
COGNITIVO			
Interpreté el concepto de área bajo la curva			
Comprendo el significado de integral definida			
Argumenté cuando apliqué las fórmulas de integración			
Utilicé las TIC y materiales mencionados en forma adecuada y eficiente			

[1] Adaptado de capacidades actitudinales (Muñoz y Noriega, 1996, pp.24-25).

FUENTES CONSULTADAS

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

Libros

- Jiménez, R. (2011). Matemáticas VI. Cálculo Integral. México: Pearson Educación.
- Orduño, H. (2008). Cálculo. México: Fondo de Cultura Económica.
- Ramírez del Castillo C. et al. Matemáticas IV, Cuaderno de Trabajo. Editorial Trillas. México. 2010.
- Álvarez, F., De la Lanza, C., Ortiz, J. (2002). **Precálculo***.* Mc Graw-Hill
- Cálculo, Purcell, Edwin J.; Varberg, Dale; Ringon, Steven E., Pearson Educación, México, 2007
- Frank Aures Jr; Elliot Mendelson CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3° Edición, Editorial Mc GrawHill, México D.F 1992

CORTE 2

ANTIDERIVADA DE FUNCIONES ELEMENTALES

Aprendizajes esperados:

- Descubre relaciones inversas entre derivación e integración: “Si de una función se obtiene su derivada, qué obtengo si de esa derivada encuentro su antiderivada”.
- Interpreta por extensión o generalización la integral indefinida de funciones polinomiales y trigonométricas básicas (seno y coseno).

PROPÓSITO

Al término de este corte serás capaz de calcular la antiderivada de funciones algebraicas y trascendentes en diferentes contextos como el de las ciencias exactas, sociales, naturales y administrativas, para que resuelvas problemas de aplicación de la integral y desarrolle habilidades que te permitan.

RECOMENDACIÓN

Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 2 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Leyes de exponentes
- Técnicas básicas de derivación
- Propiedades de las integrales definidas
- Tipos de funciones polinomiales y trigonométricas

Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

I. Aplica las leyes de los exponentes y escribe una expresión equivalente en cada uno de los siguientes ejercicios.

a) $\sqrt[7]{x^6} =$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^6 =$

c) $\frac{2}{x^{-4}} =$

d) $x^{\frac{4}{3}} =$

e) $m^{-4}m^2 =$

II. Aplica las reglas y técnicas de derivación y encuentra la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 4$

b) $g(t) = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 - 5t$

c) $h(x) = 5\cos(x-2)$

d) $p(x) = -3xsen(3x)$

e) $m(x) = 2Ln(5x^3)$

III. Simplifica las expresiones

a) $4 + x^2 - 6x - x + 3x^2 - 5 + x^3 =$

b) $2x + \frac{x}{2} - 1 =$

c) $\left(\frac{x^5-2x^2-x}{2x}\right) =$

d) $(4x + 5)(3 - 2x) =$

s

https://youtu.be/CfbspxOf0lA
https://youtu.be/KluPb75C60M
https://youtu.be/RBN1HeRmZlc
https://youtu.be/nTY64wRlczA
https://youtu.be/zYM93DA5S7A

CONTENIDOS

A continuación, encontrarás una serie de contenidos que te servirán de apoyo para el logro del propósito del corte 2.

INTRODUCCION

Para estudiar el crecimiento de las poblaciones, los expertos utilizan la fórmula $\frac{dy}{dt} = ky$. Si la población (y) crece cuando aumenta el tiempo (t), se aplica la ley de crecimiento natural. Si la población disminuye mientras transcurre el tiempo, se aplica la ley de decrecimiento natural. La fórmula que se utiliza para estos cálculos es una derivada y para encontrar la función que pueda aplicarse a un determinado problema, necesitamos expresarla primero como una ecuación diferencial $\frac{dy}{y} = Kdt$ y después integrar cada miembro de la igualdad, quedando de la siguiente manera: $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$.

Relaciones inversas entre derivación y antiderivación

Dentro de la Matemáticas existen operaciones y funciones inversas, por ejemplo, los que se muestran a continuación en la siguiente tabla[2]:

Operación o función	Símbolo	Operación o función inversa	Símbolo
Suma	+	Resta	-
Multiplicación	×	División	÷
Función exponencial	$y = a^x$	Función logaritmo	$y = \log_a x$

[2] Tomado del Colegio de Bachilleres (2004). COMPENDIO FASCICULAR CADI 2. México

En cálculo diferencial estudiamos el problema para obtener la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Ahora nos ocuparemos del problema inverso, es decir dada la derivada $f'(x)$ trataremos de obtener la función $f(x)$. Por ejemplo, veamos la siguiente tabla:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
1. $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
2. $f(x) = x^2 + 3$	$f'(x) = 2x$
3. $f(x) = x^2 - \frac{7}{4}$	$f'(x) = 2x$
4. $f(x) = x^2 - 1$	$f'(x) = 2x$

¿Sería $f(x) = x^2$, o $f(x) = x^2 + 3$, o $f(x) = x^2 - \frac{7}{4}$, o $f(x) = x^2 - 1$? Si se analiza la tabla, puede observarse que todas son en realidad la función "original", ¿cómo se puede representar lo anterior?, ¿Cuál es la función "original"?

$$f(x) = x^2 + c$$

De lo anterior podemos concluir que: La antiderivada es la relación inversa de la derivada.

Lo que significa que, cada función tiene una familia de antiderivadas. Por ejemplo, las antiderivadas de $2x$ son la familia de funciones $x^2 + c,$ donde c puede ser cualquier número constante.

NOTA[3]**:** Las expresiones **integral indefinida** y **función primitiva** son sinónimos de la palabra **antiderivada.**

La integral indefinida de una función se puede ver cómo, la familia de antiderivadas de una función. También tiene una notación especial[4].

[3] FUENLABRADA S.(2007) Cálculo Integral. México, McGrawHill,

[4] Adaptado de Colegio de Bachilleres (2004).Guía para presentar exámenes de Recuperación Especial (Apoya a Plan 92) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II, pag. 45

Llamamos a F una antiderivada de f en el intervalo I, si $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ **en I, es decir, si F´(x) = f(x) para toda x en I, esto es:**

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad sí\ y\ sólo\ si\ \ F'(x) = f(x)$$

Lo anterior se puede interpretar de la siguiente manera: Al integrar una función $f(x)$ Se obtiene como resultado la función $F(x)$; si este resultado se deriva obtendremos como resultado al integrando y además sirve como comprobación.

Propiedades o fórmulas básicas de la integral indefinida[5]

Basado en lo anterior se presentan a continuación las fórmulas básicas de integración.

Un factor constante **K** puede escribirse antes del signo de integral, donde **c** es la constante de integración

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

Regla de las potencias simples

$$\int x^n dx = \left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + c$$

Donde el exponente $n\ es\ un\ número\ racional\ y\ n \neq -1$

Si fes integrable y **k** es un número real cualquiera, entonces **kf** es integrable

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Sean **f** y **g** funciones integrables, entonces

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

[5] FUENLABRADA S.(2007) Cálculo Integral. México, McGrawHill

Fórmulas de integración para funciones transcendentales[6]

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$$

$$\int \tan u \, du = \ln\left|\sec u\right| + c$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$$

$$\int \cot u \, du = \ln\left|\operatorname{sen} u\right| + c$$

$$\int \sec u \, du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

$$\int \csc u \, du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$$

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + c$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

https://youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dEHnMLZGaNEXgHzJ2-TPLWw
https://es.khanacademy.org/math/calculus-all-old/integration-techniques-calc

Veamos unos ejemplos a continuación.

[6] Adaptado de Colegio de Bachilleres (2004).Guía para presentar exámenes de Recuperación Especial (Apoya a Plan 92) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II, pag. 46

I. Calcula las siguientes integrales (antiderivadas) y realiza la comprobación[7] mediante la derivación.

a) $\int 5x^3\,dx$

Paso 1. El 5 es una constante que se puede escribir fuera de la integral

$$\int 5x^3dx = 5\int x^3dx$$

Paso 2 Para encontrar una antiderivada de x^3 (o sea la primitiva) aplicamos la fórmula:

$$\int x^n dx = \left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + c$$

Por tanto:

$$5\int x^3 dx = 5\left(\frac{1}{3+1}\right)x^{3+1} + c$$

Paso 3: se realizan las operaciones (simplificación) indicadas y se obtiene finalmente el resultado

$$\int 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4 + c$$

Para realizar la comprobación de la integral, se deriva el resultado, por ende:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{4}x^4 + c\right) = \frac{5}{x}(4)x^{4-1} + \frac{dc}{dx}$$

Recordando que c es una contante, entonces: $\frac{dc}{dx} = 0$

Al simplificar se obtiene al integrando

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{4}x^4 + c\right) = 5x^3$$

b) $\int (6x^2 + 2x - 3)dx$

Paso 1 en este ejemplo $f(x) = 6x^2,\ \ g(x) = 2x,\ \ h(x) = 2$ aplicando la propiedad de suma y resta de funciones

$$\int [6x^2 + 2x - 3)dx] = \int 6x^2dx + \int 2xdx - \int 3dx$$

Paso 2 Los factores constantes se escriben afuera de las integrales y se aplican las propiedades de potencia y constante, como se muestra a continuación:

$$\int [6x^2 + 2x - 3)dx] = 6\int x^2dx + 2\int xdx - 3\int dx$$

Separando cada integral

[7] ibidem

$$6\int x^2dx = 6\left(\frac{1}{2+1}\right)x^{2+1} + c_1 = \frac{6}{3}x^3 + c_1$$

$$2\int xdx = 2\left(\frac{1}{1+1}\right)x^{1+1} + c_2 = \frac{2}{2}x^2 + c_2$$

$$3\int dx = 3x + c_3$$

Paso 3 Se sustituyen los resultados de las integrales, tomando en cuenta que

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$\int \left(6x^2 + 2x - 3\right)dx = \frac{6}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 - 3x + c$$

Paso 4 Finalmente se simplifica el resultado

$$\int \left(6x^2 + 2x - 3\right)dx = 2x^3 + x^2 - 3x + c$$

Para la comprobación, se deriva el polinomio del resultado y se obtiene el integrando

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + x^2 - 3x + c) = 2(3)x^2 + 2x - 3 + 0$$

Simplificando:

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + x^2 - 3x + c) = 6x^2 + 2x - 3 +$$

c) Aplicando a funciones trigonométricas básicas (seno)

$$\int senxdx$$

Paso 1 Este tipo de integrales se resuelven de forma inmediata, por tanto

$$\int sen\, xdx = -cosx + c$$

Para realizar la comprobación

$$\frac{d}{dx}(-cos\ x + c) = \frac{d}{dx}(-\cos x) + \frac{dc}{dx} = -(-senx) = senx$$

Actividades de aprendizaje 1

Analiza con atención cada una de las siguientes expresiones y encuentra la antiderivada o integral aplicando las propiedades de integración respectiva.

1. $\int(4x^3-6x^2-x+1)dx$

2. $\int\frac{3}{4}x^4+xdx$

3. $\int\frac{5}{x}dx$

4. $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{6x^4}$

6. $\int \left(8x^3 + \frac{4}{5}x^2 - 3x + 2\right) dx$

7. $\int \left(-\frac{4}{7}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x\right) dx$

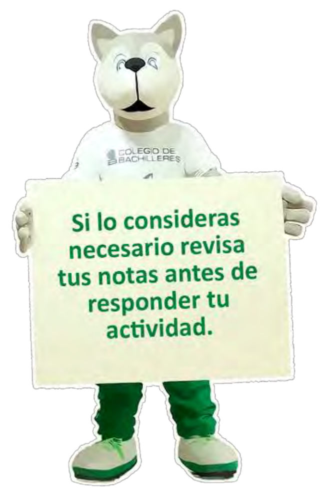
8. $\int (3x^5 - 2x^3 - 20x + 2)dx$

9. $\int 5x^{-2} + x^{-1}\, dx$

10. $\int x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\, dx$

11. $\int \frac{senx}{4} dx$

12. $\int(x - 3cosx + senx)dx$



Integrales de funciones trigonométricas y polinomiales básicas

Debido a que en cálculo integral no se tiene una fórmula directa para resolver algunas integrales, debemos realizar un procedimiento para convertir esa integral en una nueva integral inmediata y así resolverla fácilmente. Para ello existe el método de sustitución o cambio de variable.

En este método se escoge una literal para nosotros es u, que se iguala a la función que incluye el integrando, se realizan ajustes necesarios para obtener una integral inmediata con la nueva variable u.

Integración por cambio de variable[8]

El método de integración se recomienda utilizarse cuando se tiene que integrar una función compuesta, y consiste en cambiar o sustituir a la función por la variable u, con el objetivo de poder aplicar una regla de integración inmediata.

Para realizar el cambio de variable se recomienda seguir un conjunto de pasos que ayudarán a definir la función primitiva:

- Analizar la integral con la finalidad de identificar una fórmula de integración que resuelva la integral (se recomienda conocer las fórmulas de integración o contar con un formulario).
- Determinar la función $''u''$ de acuerdo con la fórmula elegida.
- Calcular el diferencial de $x\ (dx)$
- Verificar que en la función que se está integrando dx esté completa, si no es así, es necesario reordenar o ajustar.
- Sustituir en la integral en términos de la variable u
- Resolver la integral en términos de u
- Reescribir la solución obtenida en términos de $''x''$

<u>Ejemplos:</u>

1. $\int sen(1-2x)dx$

Solución:

- Al analizar la integral que se presenta, se puede observar que se parece a la regla de integración: $\int sen\, u\, du = -\cos u + c$
- Determinar u de acuerdo con la fórmula elegida, en este caso: $u = 1 - 2x$
- calcular la diferencial de x, "dx"

$$du = -2dx$$

[8] Tomado del material de (2012) Cuadernillo de trabajo Matemáticas V Calculo y azar. COLEGIO DE BACHILLERES

- verificar que la diferencial este completa en la integral, de no ser así, se realiza un ajuste.

  El ajuste de la diferencial implica que al reescribir la integral de x en términos de la variable u, la integral quede exactamente como aparece en las fórmulas básicas de integración, salvo quizá por alguna constante multiplicando, la cual, por las propiedades de la integral se puede expresar fuera de la integral (multiplicando a la integral completa) y con ello permitir que la solución sea inmediata.

  Como puedes observar, el -2 que aparece junto dx no forma parte de la integral original, por tanto, hay que ajustar, es decir, despejar el -2, por tanto queda:

$$\frac{du}{-2} = dx$$

- sustituyendo y resolviendo la integral para la variable u

$$\int sen(1-2x)dx = \int sen\, u\, \frac{du}{-2}$$

Expresando la constante $-\frac{1}{2}$ multiplicando la integral tenemos:

$$-\frac{1}{2}\int sen\, u\, du = -\frac{1}{2}(-\cos u) + c = \frac{1}{2}\cos u + c$$

- reescribir la solución obtenida en términos de x. Realizamos el cambio de variable $u = 1 - 2x$

$$\int sen(1-2x)dx = \frac{1}{2}\cos u + c = \frac{1}{2}\cos(1-2x) + c$$

2. $\int \frac{dx}{1-x}$

- La fórmula apropiada es: $\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$
- Por tanto, $u = 1 - x$
- La diferencial es: $du = \frac{d(1-x)}{dx} = -dx$
- ¿está completa la diferencial de x o se necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ájustala: $\frac{du}{-1} = dx$ esto es igual a $-du = dx$
- Sustituir la variable “u” y resolver en términos de “u”

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{-du}{u} = ln\, u + c$$

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

$$\int \frac{dx}{1-x} = Ln\, u + c = ln(1-x) + c$$

3. $\int \sqrt{1+\frac{x}{2}}dx$

- La fórmula apropiada es $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
- Por tanto $u = 1 + \frac{x}{2}$
- La diferencial de u es.

$$du = \frac{d(1+\frac{x}{2})}{dx} = \frac{1}{2}dx$$

- ¿está completa la diferencial de x o se necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ájustala: $2du = dx$
- Sustituir la variable "u" y resolver en términos de "u"

$$\int \sqrt{1+\frac{x}{2}}dx = \int \sqrt{u}(2du) = 2\int \sqrt{u}du$$

Aplicando leyes de exponentes: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ por tanto $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ entonces:

$$2\int \sqrt{u}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}] + c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

$$\int \sqrt{1+\frac{x}{2}}dx = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(1+\frac{x}{2})^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}\sqrt{(1+\frac{x}{2})^3 + c}$$

4) $\int x^2(x^3-5)^4 dx$

- La fórmula apropiada es $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
- Por tanto $u = x^3 - 5$
- La diferencial de u es. $du = 3x^2dx$
- ¿está completa la diferencial de x o se necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala: $\frac{du}{3} = x^2dx$
- Sustituir la variable "u" y resolver en términos de "u"

$$\int x^2(x^3-5)^4dx = \int u^4\frac{du}{3} = \int \frac{1}{3}u^4du = \frac{1}{3}\int u^4du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right) + c = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}\right) + c = \frac{1}{15}u^5 + c$$

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

$$\int x^2(x^3-5)^4 dx = \frac{1}{15}u^5 + c = \frac{1}{15}(x^3-5)^5 + c$$

5) $\int \frac{3x}{x^2-9} dx$

- La fórmula apropiada es: $\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$
- Por tanto, $u = x^2 - 9$
- La diferencial es: $du = \frac{d(x^2-9)}{dx} = 2xdx$
- ¿está completa la diferencial de x o se necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala: $\frac{du}{2} = dx$
- Sustituir la variable "u" y resolver en términos de "u"

$$\int \frac{3x}{x^2-9} dx = \int \frac{3}{u}\left(\frac{du}{2}\right) = \int \frac{3}{2}\frac{du}{u} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2} ln\ u + c$$

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

$$\int \frac{3x}{x^2-9} dx = \frac{3}{2}\ln u + c = \frac{3}{2}\ln\ (x^2-9) + c$$

https://es.khanacademy.org/math/calculus-all-old/integration-techniques-calc/u-substitution-calc/v/u-substitution
https://youtu.be/UZyG4jCBMgU

Actividad de aprendizaje 2

Analiza con atención cada una de las siguientes expresiones y encuentra la integral aplicando el cambio de variable. Ejercicios 1, 4, 8[9] y ejercicio 2, 3 y 6[10].

1. $\int x^2\ sen(x^3)dx$

$$\int sen\ u\ du = -\cos u + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Por tanto $u =$___________
- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de "u"

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

[9] Adaptado de Colegio de Bachilleres (2004).Guía para presentar exámenes de Recuperación Especial (Apoya a Plan 92) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II,
[10] Adaptado del material de (2012) Cuadernillo de trabajo Matemáticas V Calculo y azar. COLEGIO DE BACHILLERES

2. $\int \frac{\cos 5x}{1+sen\, 5x}\,dx$

$$\int \cos u\, du = \ sen\, u + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

- Por tanto $u =$____________

- La diferencial es:

$du =$ _________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

3. $\int 2\sqrt{3+x}\,dx$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar

$$\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$$

- Por tanto $u =$____________

- La diferencial es:

$du =$ _________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

4. $\int -10(4+2x)^4 dx$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar

$$\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$$

- Por tanto $u =$___________

- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

5. $\int \frac{\cos 4x}{\operatorname{sen} 4x} dx$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar

$$\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$$

- Por tanto $u =$___________

- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

6. $\int sen\ 3x \cos 3x\ dx$

$$\int sen\ u\ du = -\cos u + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Por tanto $u =$ ___________

- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

7. $\int \operatorname{sen}\left(3+\frac{x}{2}\right)dx$

$$\int sen\, u\, du = -\cos u + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar:

$$\int \cos u\, du = sen\, u + c$$

- Por tanto $u =$___________

- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x

8. $\int \frac{8x}{x^2-16}dx$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

- Cuál es la fórmula a utilizar

$$\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$$

- Por tanto $u =$___________

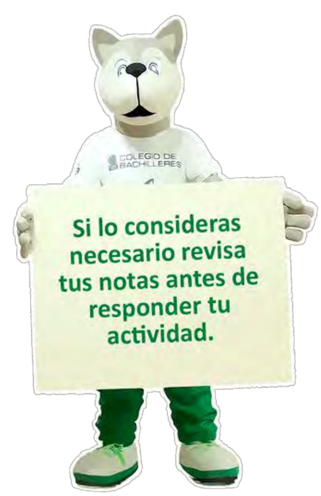
- La diferencial es:

$du =$ ________

- ¿Está completa la diferencial de x o necesita ajustarse?, en caso afirmativo, ajústala

- Resuelve la integral en términos de “u”

- Reescribe la solución obtenida en términos de x



En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte.

Autoevaluación[11]

Instrucciones: lee cuidadosamente cada uno de los siguientes enunciados y marca con una X la celda que describa mejor tu desempeño durante este corte anota tus observaciones y comentarios.

Indicador			
DESEMPEÑO	**SI**	**NO**	**Observaciones y/o comentarios**
Terminé todas las actividades de este corte			
Realicé las actividades en orden			
Reforcé conceptos			
COGNITIVO			
Interpreté el concepto de antiderivada			
Comprendo el significado de "C" en la integral indefinida			
Argumenté cuando apliqué las fórmulas de integración			
Utilicé las TIC y materiales mencionados en forma adecuada y eficiente			

[11] Adaptado de capacidades actitudinales (Muñoz y Noriega, 1996, pp.24-25).

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

Fuentes de información

- Fuenlabrada, S. (2007). Cálculo Integral. México: McGraw-Hill Interamericana

- Colegio de Bachilleres (2004). Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (apoya a Plan 92) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I. Consultado en: https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_I.pdf

- Colegio de Bachilleres (2004). Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (apoya a Plan 92) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II. Consultado en: https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_II.pdf

- Colegio de Bachilleres (2004). COMPENDIO FASCICULAR CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II. Consultado en https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/compendios/sexto/cadi_2.pdf

- Khan academy. (s. f.) Cálculo avanzado 1. Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab

Instrucciones. Para que puedas evaluar tu aprendizaje, contesta las preguntas que se te formulan, escribiendo detalladamente el procedimiento que realizaste.

I. Calcula el área bajo la curva para las siguientes funciones, incluyendo la gráfica que lo represente.

   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ en el intervalo $[-2,3]$

b) $f(x) = x^3 - 4x$ en el intervalo $[-2,2]$

c) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ en el intervalo $[-1,4]$

-

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1. (   ) El valor de la integral inmediata $\int (2x^4 - 5x^2 - 4x - 6)dx$ es:

   a) $\frac{2}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 6x + c$
   b) $\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + c$
   c) $\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + c$
   d) $-\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + c$

2. (   )¿Cuál es la solución de la integral $\int \sqrt{x^7} + x^2 dx$

   a) $-\frac{2}{9}\sqrt{x^9} + \frac{x^3}{3} + c$
   b) $\frac{2}{9}\sqrt{x^9} + \frac{x^3}{3} + c$
   c) $\frac{2}{9}\sqrt{x^9} - \frac{x^3}{3} + c$
   d) $-\frac{2}{9}\sqrt{x^9} - \frac{x^3}{3} + c$

3. (   ) ¿Cuál es el valor de la integral $\int \frac{5\ \cos x}{3} dx$

   a) $\frac{5}{3} senx + c$
   b) $-\frac{5}{3} senx + c$
   c) $\frac{3}{5} senx + c$
   d) $-\frac{3}{5} senx + c$

4. (   ) ¿La solución de la integral $\int 4x^2(6 + x^3)^4 dx$ es?

   a) $\frac{4}{15}(6 + x^3)^3 + c$
   b) $-\frac{4}{15}(6 + x^3)^5 + c$
   c) $-\frac{4}{15}(6 + x^3)^3 + c$
   d) $\frac{4}{15}(6 + x^3)^5 + c$

5. ( ) ¿la solución de la integral es $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right) dx$ es?

a) $\frac{3}{2} cos\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

b) $-\frac{3}{2} cos\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

c) $-\frac{3}{2} sen\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

d) $\frac{3}{2} sen\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

6. ( ) al resolver la integral $\int sen\ 6x \sqrt{cos\ 6x}\ dx$ la solución es:

a) $\frac{1}{9}\sqrt{(cos6x)^3} + c$

b) $-\frac{1}{9}\sqrt{(sen6x)^3} + c$

c) $\frac{1}{9}\sqrt{(sen6x)^3} + c$

d) $-\frac{1}{9}\sqrt{(cos6x)^3} + c$

7. ( ) la solución de la integral $\int \frac{4}{1+x} dx$ es?

a) $4\ Ln(1-x) + c$
b) $-4\ Ln(1-x) + c$
c) $4\ Ln(1+x) + c$
d) $-4\ Ln(1+x) + c$

8. ( )¿cuál es la solución de la integral $\int(-x^2 + 4cos\ x)dx$?

a) $-\frac{x^3}{3} + 4senx + c$

b) $-\frac{x^3}{3} - 4senx + c$

c) $\frac{x^3}{3} + 4senx + c$

d) $\frac{x^3}{3} - 4senx + c$

PLAN 2014

ACTUALIZADO

Somos Lobos Grises,
somos Bachilleres